SHOUT
SHARE
IT

Q1310.C8.

S.1310.C.8.

Abhandlungen

der

Churfürſtlich-baieriſchen

Akademie

der

Wiſſenſchaften

Achter Band,

Welcher die philoſophiſchen enthält.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

München, mit akademiſchen Schriften. 1773.

NB. In der letzten S. der Vorrede Z. 22. leſe anſtatt 7ten Band 8ten Band.

Vorrede.

Der gegenwärtige 8te Band enthält dreyzehn Abhandlungen, wovon die erſte ein Zuſatz des Herrn Profeſſors Karſten in Bützow und gleichſam ein Anhang zu derjenigen Theorie von Projectionen der Kugel iſt, die man im 5ten Bande der philoſophiſchen Abhandlungen S. 109. findet. In dieſem Zuſatze wird ſolche Theorie mit derjenigen von Kegelſchnitten verglichen, und ihre vollkommene Uebereinſtimmung gezeiget. Der Herr Verfaſſer liefert uns nicht nur allgemeine analytiſche Formeln, woraus des Apollonius Sätze von den Kegelſchnitten nach der verſchiedenen Lage der planorum Secantium hergeleitet werden können; ſondern er machet ſie auch noch allgemeiner, indem er ſie auf ſchiefe Kegelſchnitte anwendet, wo man nicht nach dem apolloniſchen Syſtem die Axe des Kegels auf die Zirkelfläche im Mittelpunkte ſenkrecht vorausſetzet.

Das zweyte Stück S. 33. u. f. von der archimedeiſchen Waſſerſchraube iſt ebenfalls von vorgenanntem Herrn Profeſſor Karſten, welcher unter den größten Geometern unſerer Zeit einen vorzüglichen Rang verdienet. Wer ſollte wohl gedacht haben, daß ſich über die archimedeiſche Waſſerſchraube, eine ſo uralt-bekannte Maſchine, noch was ſagen ließe, daß man nicht in hundert andern und ſelbſt in den Elementar-Büchern von der Hydraulik findet. Indeſſen iſt doch gewiß, daß die Eigenſchaften dieſer Maſchine

ſchine noch bey weiten nicht völlig aufgekläret ſind. Selbſt der groſſe Analyſt, Herr Euler hat in dem comment. nov. Petrop. Tom. V. die Theorie davon unvollkommen laſſen müſſen: weil er auf eine Differentialgleichung der Geſchwindigkeit des Waſſers in der Spiralröhre gefallen iſt, die ſich nicht integriren läßt. Dieß mag wohl der Berliner Akademie Anlaß gegeben haben, im Jahre 1766. die Preißfrage aufzuwerfen, wie eine Waſſerſchraube am vortheilhafteſten anzuordnen ſey? worüber ſie den Preis dem Herrn Hennert zuerkannt hat. Herr Karſten findet aber die Hennertiſche Auflöſung nicht für zureichend, und hält dafür, daß obige Preisfrage in der Hauptſache unbeantwortet geblieben ſey. Das hat ihn veranlaſſet, gegenwärtige Abhandlung zu ſchreiben.

Im dritten Stücke S. 87. u. f. handelt Herr Doctor Buchholz zu Weimar vom Spießglaß-Schwefel, und giebt nach manchen Verſuchen, die er alle mit Umſtänden erzählt, eine Methode an Hand, wie dieſer Spießglaßſchwefel gleich nach dem erſten Niederſchlage eben ſo gut corrigirt und zur Medicin brauchbar gemacht werden könne, als derjenige vom 4ten Niederſchlag, den man nach der gewöhnlichen Art zubereitet.

Der Verfaſſer des 4ten Stückes von den Saugwerken S. 97. u. f. iſt wiederum unſer mehrbelobter Herr Profeſſor Karſten. Dies Stück iſt ſehr practiſch, und gleichwohl die ganze vollſtändige Theorie von Saugwerken auf die höhere Analyſe gegründet. Der Herr Verfaſſer theilet ſie in vollkommene, unvollkommene und mittlere. Vollkommene Saugwerke ſind diejenigen, welche keinen ſchädlichen Raum haben, und die ſoviel Waſſer geben, als in einer gegebenen Zeit möglich iſt: die erſte nothwendige Bedingniß hiebey iſt, daß das Ventil oben an der Saugröhre ſeyn muß. Unvollkommene ſind, die ihr Ventil zu unterſt der Saugröhre haben. Mittlere endlich ſind, die zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre haben, aber zwiſchen den Kolben und der Grundfläche des Stiefels einen leeren oder ſchädlichen Raum laſſen. Der H. V. giebt Berechnungen für alle Arten an, und unterſuchet in zweyen Abſchnitten: 1) die anfängliche Bewegung des Waſſers in der Saugröhre und dem Stiefel, ehe es noch den Kolben erreichet, und 2) ſeine Bewegung in dem Stiefel, wenn ſchon alle Luft aus dem ſchädlichen Raume ausgetretten iſt. Liebhaber der Hydraulik werden dieſe Abhandlung mit Vergnügen leſen: worinnen ſie die analytiſchen Formeln auf Gegenſtände dieſer Art ſo zu verläßig angewendet finden werden.

Das fünfte Stück, das iſt Verſuch eines evidenten Beweiſes der allgemeinen mechaniſchen Grundſätze S. 147. u. f. haben wir ebenfalls dem unermüdeten Fleiße des H. Profeſſors Karſten zu danken. Es iſt leichter (ſaget der Herr Verfaſſer,) die phyſikaliſchen Wiſſenſchaften zu erweitern, nachdem man es mit den Differential- und Integralrechnungen ſo weit gebracht hat, als die erſten Anfangsgründe derſelben recht evident und ungezweifelt zu beweiſen. Dieſes Stück dienet zu einer Probe, wie behutſam man verfahren müſſe, wenn man ſich reine Begriffe bilden, und nicht von vorangenommenen Blendwerken der Einbildungskraft auf Irrwege verleitet werden will.

Im ſechſten Stücke S. 177. beantwortet Herr Euſebius Amort, Canonicus Regularis in Polling die Frage: wo ſo viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denſelben abzuhelfen ſey? der Herr Verfaſſer ſucht die Urſache dieſer Ueberſchwemmungen in dem häufig anwachſenden Sande, und ſchlägt etliche Mittel vor, wie man dieſem Uebel auf eine leichte Art ſteuren, und dadurch die Flüſſe in ihrem urſprünglichen Bette erhalten könne. Die Schriften dieſes berühmten Mannes haben allezeit ihren beſondern Werth, ſollten ſie auch noch ſo klein ſeyn. Und um dieſer Betrachtung willen haben wir dieſe kleine Pieçe hier einſchalten wollen.

Der Herr Verfaſſer erzählet am Ende die Stiftung eines Hofmalers, Namens Amorth, (der vermuthlich aus ſeiner Familie war) um nächſt Lengries in ober Baiern die Iſer von großen Steinen zu reinigen. Und füget als ein wahrer Patriot den frommen Wunſch hinzu, daß begüterte Leute in Baiern dieſem Beyſpiele folgen, und entweder bey ihren Lebszeiten oder durch letztwillige Vermächtniſſen dergleichen Stiftungen zu Säuberung der Flüſſe, von dem anwachſenden Sande, zu Verhütung der Ueberſchwemmungen zu machen. Der Gedanken iſt freylich wie der Herr Autor ſaget, ſüße: er iſt aber den reichen Stiftern älterer und neuerer Zeiten nicht beſonders fühlbar, die nur um das remedium animarum ſuarum beſorget ſind, und vermittelſt ihrer meiſtentheils unrechtmäßig erworbenen Güter, alsdenn erſt, wenn ſie ſelbige nicht mehr genießen können, das iſt, in articulo mortis mit dem Himmel gleichſam compoſition treffen wollen, ohne ſich viel darum zu bekümmern, ob es ihrem Vaterlande nach ihrem Tode wohl oder übel ergehe: weil ſie, als Todte und Bürger der andern Welt, mit der unſrigen nichts zeitliches mehr gemein haben. Vieleicht dörften aber doch dergleichen menſchenfreundliche Stiftungen mit der Zeit mehr, als jetzo, in die Mode kommen, wenn nur lauter ſolche Beichtväter, wie der patriotiſche Herr Amort iſt, den reichen Sterbenden aßiſtirten.

Daß 7te Stück, S. 181. u. f. von verſchiedenen Wendungen der krummen Linien. Das Achte von den Centralkräften S. 203. u. f. Und das Neunte S. 245. u. f. von der Berechnung des im Jahre 1769. erſchienenen Cometen, hat Herr P. Leonard Gruber, ein Benedictiner Religios von dem Kloſter Weden, zur Akademie eingeſchicket. Wir müßen die Recenſion dieſer Stücke umgehen, um unſere Vorrede, die ſchon weitläuftig genug ausgefallen, nicht noch weitläuftiger zu machen. Wir rücken aber dieſelben mit Vergnügen ein, weil ſie zur Probe dienen, wie die analytiſchen Wiſſenſchaften in unſerm Vaterlande, wo ſie bisher noch nicht allgemein worden, aufzukeimen anfangen; und wir wünſchen hiernächſt, daß unſere Landsleute durch dieſe Beyſpieſe aufgemuntert werden möchten, dieſen Theil der höhern Geometrie, womit man in der Mathematik und Phyſik gleichſam Wunder thun kann, ihrer Aufmerkſamkeit und Bemühungen würdig achten, und andere aufgeklärte Nationen in dieſer Laufbahne, worinnen dieſelben es ſo weit gebracht haben, ſoviel möglich zu erreichen trachten möchten.

Schon dieſe wohlgerathenen Verſuche beweiſen, daß es auch in unſerm Clima nicht an Subjecten mangelt, die eine glückliche Anlage zu tiefſinnigen Unterſuchungen in der höhern Geometrie haben. Beſonders ſollten dieſe Beyſpiele unſere Ordensgeiſtlichen, des Herrn Verfaſſers Mitbrüder anreizen, in ihren vom Gebethe und Regular-Uebungen übrigen Stunden ihren Geiſt mit ſo nützlichen und reellen Sublimitäten zu nähren und zu beſchäftigen, anſtatt die edle Zeit mit metaphyſiſchen Grillen und andern ſcholaſtiſchen Alfanzereyen zu verſchwenden, die weder den Geiſt zu erleuchten, noch vielweniger das Herz zu beſſern vermögend ſind.

Der Verfaſſer des 10ten Stücks S. 279. von dem unterirdiſchen Bau bey Bergwerken, iſt H. Carl Scheidt, der die akademiſchen Abhandlungen ſchon mit manchen ſchönen Beyträgen von dieſer Art bereichert hat. Zur Empfehlung dieſes Stückes dörfen wir den Kennern nur ſagen, daß der nämliche practiſche Bergbaugeiſt darinnen herrſchet, den ſie in den vorigen Abhandlungen von Herrn Scheidt, in dieſer Materie gefunden haben. Es iſt zwar nicht alles neu darinnen, der Herr Verfaſſer giebt es auch nicht dafür aus. Man findet aber darinnen viele neue brauchbare Anwendungen bekannter Wahrheiten. Und das iſt doch noch das beſte, was man nach ſoviel Entdeckungen in unſeren aufgeklärten Zeiten noch erwarten kann. In der That fällt es nicht gar ſchwer zu entſcheiden, ob manche nagelneue Erfindungen, die ſich mit bloßen Speculationen endigen, nicht ſolchen Erweiterungen längſt erfundener Wahrheiten nachzuſetzen ſeyn, deren Ausübung dem menſchlichen Geſchlechte neue beträchtliche Vortheile gewähret.

In dem Eilften Stück S. 317. u. f. liefert Herr Doct. Med. Brunwieſer, Stadtphyſicus in der baieriſchen Stadt Kellheim verſchiedene Verſuche, mit mineraliſchen ſauren Geiſtern allerhand Farben aus den Hölzern zu ziehen, und zeiget, wie aus dieſen Farben, die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten und Blätter der Vegetabilien erkläret werden mögen. Die angeſtellten Verſuche ſind aller Aufmerkſamkeit werth, weil ſie auf Schlüße führen können, die in einer ſo wichtigen Branche des Comercii, wie das Farbeweſen iſt, ſeiner Zeit manche Vortheile verſchaffen dörften. Der

Herr Verfaſſer ſtellet ſich die Sache ſo vor, daß die Farben-Materie oder das Farbenweſen, mit einem alcaliſchen Salze genau verbunden, in dem Stamme der Bäume und Pflanzen verborgen liegt, und nachdem es alle Faſern des Stammes durchwandert hat, an der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Früchten, durch die Action und das Berühren der Luft, welche ganz ungezweifelt mit allerhand ſauren Geiſtern imprägnirt iſt, von den Feſſeln des alcaliſchen Salzes, ſo ſich mit den ſauren Lufttheilchen vereiniget, entbunden wird, und hiemit die mannichfaltigen Farben entwickelt, die wir an den Blättern, Blüthen und Früchten bewundern. Daß ein alcaliſches Salz in allen Holz- und Pflanzarten verborgen ſtecke, ſo mit den Farbeweſen verbunden iſt, davon haben ihn nicht nur des Herrn Marſchalls ſondern auch ſeine eigenen Verſuche überführet. Er nimmt drey urſprüngliche oder Grundfarben an, aus deren Vermiſchung alle übrigen entſtehen, nämlich gelb, roth und blau: und ſo giebt es auch in ſeinem Syſtem dreyerley mineralſäuren, deren eine jede auf eine von dieſen Grundfarben ihre vorzügliche Wirkung ausübet. So dienet die Salpeterſäure vornehmlich die gelbe Farbe hervorzubringen: die Vitriol- und Salzſäuren hingegen ſind für die rothen und blauen Farben gemacht.

Dieſe aus Erfahrungen hergeleiteten Betrachtungen haben den H. V. im zwölften Stücke auf eine Entdeckung gebracht, wie man vermittelſt der Salpeterſäure, aus verſchiedenen meiſtentheils ſehr ſchlechten und ſonſt unbrauchbaren Holzarten ein ſo ſchönes und dauerhaftes Gelb herausziehen und hiermit Wollen- Kameelharene und Seidenzeuge färben könne, die an Glanz und Dauerhaftigkeit den Indianiſchen und andern fremden Farben nichts nachgeben, wie die zur Akademie eingeſendeten Muſterproben zur Genüge beweiſen.

Er hat zwar bis hieher die rothe und blaue Farbe mit ſeinen mineraliſchen ſauren Geiſtern nicht erzwingen können. Vielleicht gelingt es ihm aber, und andern unermüdeten Chymiſten, noch mit der Zeit, auch in Anſehung dieſer Farben, durch hartnäckige Verſuche, es eben ſo weit, als mit der gelben, zu bringen. Daß wir endlich vieleicht in unſerm eigenen vegetabiliſchen Reiche alle Farben finden können, die wir jezt mit ſo vielen Koſten von fremden Landen holen müſſen.

Das lezte und dreyzehente Stück S. 353. u. f. haben wir von H. P. Clarus Mayr, Benedictiner Religioſen im Kloſter Vormbach. Es enthält Gedanken, wie dem faſt jährlichen von Austreten der Flüße verurſachten Schaden nach den Naturgeſäzen des Waſſers zu ſteuren ſey. Herr P. Clarus will ſeine akademiſche Pflicht erfüllen, welche, den Geſetzen zufolge, von einem jeden ordentlichen Mitgliede alle Jahre eine Abhandlung fordert. Er hat auch dieſe Pflicht ſeit ſeiner Aufnahme fleißig erfüllet, wie die akademiſchen Abhandlungen von Jahr zu Jahre bezeugen. O! möchte doch dieſes rühmliche Beyſpiel diejenigen beſchämen und bekehren, die da immerfort dieſe Pflicht andern vorpredigen, und doch ſelbſten nichts anders thun, als Lärmen, Schreyen, und Tadeln, und die, wenn ſie in 12. Jahren einmal höchſtens zwey Bogen ſeichtes Zeug zu Markte bringen, andere für unnütze Mitarbeiter ausſchreyen, welche von den wichtigſten Sachen ganze Alphabete ſchreiben. Da die berühmte Abbtey Vormbach, welcher der H. V. ſehr viel Ehre macht, am Innſtrom liegt; ſo hat derſelbe Gelegenheit gehabt, über die frequenten Austrettungen dieſes reiſenden Stroms Betrachtungen genug anzuſtellen, welche ſeinem naturforſchenden Geiſte allerdings angemeſſen ſind. Die Vorſchläge, welche er thut, 1) die Flüſſe von der Ueberſchwemmung zu bewahren, und ſo unſchädlich zu machen als immer möglich iſt. 2) ſie in ihrem alten Rinnſal zu erhalten oder dahin zurückzuführen und 3) dieſe anſcheinenden Anomalien oder Feindſeligkeiten der Natur in Wohlthaten zu verkehren, ſind practiſch, nicht nur möglich ſondern gar leicht, und der Aufmerkſamkeit der Regenten ſowohl als des Landmanns allerdings würdig. Edle Bemühungen für Religioſen, die einem Orden zugehören, welchem ſo viele Länder, nebſt dem Lichte des Evangelii, auch ihre Cultur und zeitliche Nahrung zu danken haben. Wir beſchließen hier die Vorrede zum 7ten Band, empfehlen denſelben, wie alle vorige, dem Publico zur geneigten Aufnahme, und wünſchen nochmals herzlich, daß ſolche Schriften unſern Landsleuten zur Aufmunterung dienen möchten, das Reich der höhern Wiſſenſchaften zum Nutzen und zur Ehre des Vaterlands durch ihre löbliche Bemühungen immer mehr zu erweitern.

Zuſatz

zu

W. J. G. Karſtens

Abhandlung

von den

Projectionen

der

Kugel.

Die Projectionen der Kugel
als
Kegelſchnitte betrachtet.

1. §.

Alle Projectionen der Kugel ſind Kegelſchnitte, ſelbſt die orthographiſchen Projectioneu, wenn der Cylinder als ein Kegel betrachtet wird, deſſen Axe unendlich groß iſt; nur diejenigen Fälle ſind hievon ausgenommen, wenn das Auge in der Ebene desjenigen Kreiſes der Kugel ſteht, deſſen Projection auf der Tafel geſucht wird. Man ſtellet ſich von allen Puncten im Umfang eines ſolchen Kreiſes der Kugel gerade Linien bis ins Auge gezogen vor, welches dabey als ein Punct betrachtet wird. Dieſe Linien liegen demnach in der Oberfläche eines Kegels, deſſen Spitze das Auge, und deſſen Grundfläche der Kreis auf der Oberfläche der Kugel iſt; es wäre dann, daß die Ebene dieſes Kreiſes durchs Auge gienge. Die Oberfläche dieſes Kegels wird von der Tafel geſchnitten, und die Durchſchnittlinie mit der Tafel iſt die Projection des Kreiſes. Die alten Geometer haben daher die Kugel-Projectionen allemal als Kegelſchnitte betrachtet, und es gehört zur Vollſtändigkeit der Abhandlung von den Projectionen der Kugel, welche ich im vorigen Jahr der Akademie überreicht habe, daß ich noch zeige, wie eine Theorie mit der andern zuſammen hänge, und wie eben die Regeln für die Verzeichnung der Projectionen auch aus der Theorie von den Kegelſchnitten folgen. Ich werde in ſolcher Abſicht zuforderſt die allgemeinen analytiſchen Formuln entwickeln, woraus alle Sätze, die Apollonius im erſten Buch von der Geſtalt der Kegelſchnitte nach der verſchiedenen Lage der ſchneidenden Ebene beweiſet, kurz und leicht können hergeleitet werden.

2. §.

Die neuern Schriftſteller, welche die Theorie von den Kegelſchnitten analytiſch abhandeln, zeigen gewöhnlich nur beyläufig, wie dieſe Linien aus dem geraden Kegel geſchnitten werden können, um den Namen zu rechtfertigen, und zu beweiſen, daß Linien der zweyten Ordnung und Kegelſchnitte einerley Linien ſind. Allein allgemeinere Betrachtungen darüber, wie dieſe Linien nicht allein aus dem geraden, ſondern auch aus dem ſchiefen Kegel geſchnitten werden können, haben in vielen Fällen der Ausübung ihren Nutzen, und die obangeführte Theorie von den Projectionen der Kugel iſt hievon ein Beyſpiel. Die neuere Analyſis, und beſonders der Gebrauch der allgemeinen trigonometriſchen Formuln, erleichtert ſo, wie viele andere Theorien der Alten, auch dieſe Betrachtung ungemein, und man iſt im Stande, vermittels einer einzigen allgemeinen Aufgabe, alles zu überſehen.

3. §.

Hr. **Euler** betrachtet in der Introd. in Anal. Inf. T. II. Append. Cap. III. zwar die Schnitte des ſchiefen Kegels: allein der Begrif vom ſchiefen Kegel, welchen er bey ſeiner Analyſi zum Grunde ſetzt, iſt gänzlich von dem Begrif unterſchieden, welchen man ſonſt mit dem Apollonius gewöhnlich annimmt. Herr **Euler** nennt nämlich einen ſchiefen Kegel denjenigen, deſſen Grundfläche eine Ellipſe, und deſſen Axe auf der Ebene dieſer Ellipſe in ihrem Mittelpunkt ſenkrecht iſt, und deſſen Oberfläche übrigens die Eigenſchaft hat, daß jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt eine Ellipſe giebt, die gleichfalls ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels hat. Dieſer Begrif läßt ſich auf den apolloniſchen ſchiefen Kegel gar nicht anwenden: es giebt in demſelben gar keine Schnitte, die Ellipſen werden, und ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels haben. Der vom Hr. **Euler** ſo genannte ſchiefe Kegel gehört ſchon in die Klaſſe einer andern Art geometriſcher Körper, die wegen der Aehnlichkeit mit dem Euclidäiſchen und Apolloniſchen Kegel ebenfalls den Namen eines Kegels führen können: aber alsdann erweitert man ſchon dieſen Begrif auf ſolche Körper, deren Oberfläche mit der eigentlichen Kegelfläche nur dieſe Aehnlichkeit hat, daß alle gerade Linien, die ganz in dieſe Oberfläche fallen, ſich in einerley Punkt, der die Spitze heißt, ſchneiden, übrigens aber durch den Umfang einer ebenen Figur gehen, die eine willkührliche Geſtalt haben kann, da es beym eigentlichen Kegel ein Kreis ſeyn muß. Dieſe kegelartigen Körper kann man füglich wieder nach der verſchiedenen Geſtalt ihrer Grundfläche in Klaſſen eintheilen, und ihnen davon die Nämen beylegen. So könnte z. E. der vom Hrn. **Euler** ſo genannte ſchiefe Kegel ein elliptiſcher Kegel heiſſen, und dieß würde denn ein gerader oder ſchiefer elliptiſcher Kegel ſeyn, nachdem ſeine Axe auf der Grundfläche gerade oder ſchief ſtünde. Eben ſo theilt Apollonius die gewöhnlich ſo genannten Kegel in gerade und ſchiefe, nachdem ihre Axen die Grundfläche entweder ſenkrecht oder ſchief ſchneiden: und dieſen Redegebrauch werde ich auch hier beybehalten. Uebrigens wird ſich die folgende Unterſuchung auf einige allgemeine Sätze gründen, die ich wegen der Vollſtändigkeit der Ausführung herſetze, da man ſie ſonſt auch beym Hrn. Euler am a. O. Append. Cap. II. §. 26. ſq. antrift. Es wird dieß zugleich zur nähern Erläuterung des Euleriſchen Vortrags dienen.

4. §.

Es iſt die Lage einer Ebene FH (1. fig.) gegen eine andre KL gegeben, welche letztere eine bekannte Lage hat: man ſoll eine Gleichung für die Ebene FH zwiſchen dreyen rechtwinklichten Coordinaten ſuchen, wovon zwey in der Ebene KL liegen, die dritte aber auf ihr ſenkrecht iſt: die Abſciſſen ſollen auf der geraden Linie AB in der Ebene KL genommen werden, deren Lage gegen die Durchſchnittslinie FG beyder Ebenen gleichfalls bekannt iſt.

Aufl. Von einem unbeſtimmten Punkt M der Ebene FH ſey MQ auf KL ſenkrecht, und QP auf AB ebenfalls ſenkrecht geſetzt; ſo ſind $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ drey ſenkrechte Coordinaten für die Ebene FH. Man ſetze, daß AB verlängert mit der Durchſchnittslinie beyder Ebenen in F zuſammen ſtoſſe, ſo iſt $AF = b$, nebſt dem Winkel $AFE = \psi$ gegeben. Übrigens ſey MS auf EF ſenkrecht, und man ziehe QS, ſo iſt $QSM = \phi$, der Neigungswinkel beyder Ebenen, gleichfalls gegeben. Man lege nun durch MQ und F eine Ebene FQM, ſo ergiebet ſich an F ein körperliches Dreyeck, deſſen Seiten QFM, SFQ, und SFM ſind. In demſelben iſt der Winkel an FQ = 90°, und der Winkel an

$FS = \phi$. Setzt man nun $PFQ = \omega$, ſo wird die Seite $SFQ = \psi + \omega$, und man erhält $\operatorname{tang} QFM = \sin(\psi + \omega) \operatorname{tang} \phi$, alſo $z = FQ \sin(\psi + \omega) \operatorname{tang} \phi$. Ferner wird $\sin \omega = \frac{Y}{FQ}$, $\cos \omega = \frac{b + x}{FQ}$. Weil nun $\sin(\psi + \omega) = \sin \psi \cos \omega + \cos \psi \sin \omega$, ſo drücke man $\sin \omega$ und $\cos \omega$ durch y und x aus, und man erhält die geſuchte Gleichung $z = b \sin \psi \operatorname{tang} \phi + x \sin \psi \operatorname{tang} \phi + y \cos \psi \operatorname{tang} \phi$.

Wenn die Linie AB mit FE zuſammen fällt, ſo wird $\psi = 0$, alſo $\sin \psi = 0$, $\cos \psi = 1$, und man erhält $z = y \operatorname{tang} \phi$, ſo daß nun z von x gar nicht abhängt, wie den Eigenſchaften einer Ebene, die in den Anfangsgründen bewieſen werden, gemäß iſt.

5. §.

Es iſt M (1. fig.) ein Punkt in der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchſchnittsfigur vorſtellt. Auf dieſe iſt MQ ſenkrecht, ſo wie QP auf die grade Linie AB, die in der Ebene KL eine bekannte Lage hat, ſenkrecht gezogen iſt, und man hat für des Körpers Oberfläche eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$. Statt der Axe AB aber ſoll man eine andre FG für die Abſciſſenlinie annehmen, welche in der Ebene KL liegt, und die vorige unter dem Winkel $BFG = \psi$ ſchneidet. **Die Frage iſt: wie die Gleichung zwiſchen x, y, und z verändert werden müſſe, wann übrigens die Coordinaten ſenkrecht bleiben.**

Aufl. Man ſetze auf AB durch A eine ſenkrechte Linie, welche FG in E ſchneidet, und nehme E für den neuen Anfangspunkt der Abſciſſen. Ueberdem ſey QS, welche AB in D ſchneidet, auf FG ſenkrecht. Iſt nun $AF = b$, ſo hat man $PD = y\,\mathrm{tang}\,\psi$, $DQ = \frac{Y}{\cos\psi}$, $DS = (b + x - PD)\sin\psi = (b + x)\sin\psi - y\,\mathrm{tang}\,\psi \sin\psi$, $FS = (b + x - PD)\cos\psi = (b + x)\cos\psi - y\sin\psi$, $EF = \frac{b}{\cos\psi}$, $SQ = DS + DQ$, $ES = FS - EF$. Wenn man nun $ES = t$, $SQ = v$ ſetzt, ſo erhält

man $v = (b + x)\sin\psi - y\,\mathrm{tang}\,\psi\sin\psi + \frac{y}{\cos\psi}$

und $t = (b + x)\cos\psi - y\sin\psi - \frac{b}{\cos\psi}$.

die erſte Gleichung multiplicire man mit $\cos\psi$, die zweyte mit $\sin\psi$ und ſubtrahire ſodann die letzte von der erſten, ſo erhält man $v\cos\psi - t\sin\psi = y + v\,\mathrm{tang}\,\psi$, alſo 1) $y = v\cos\psi - t\sin\psi - v\,\mathrm{tang}\,\psi$. Dieß ſetze man ſtatt y in die zweyte Gleichung, ſo wird $b + x = \frac{t}{\cos\psi}\,y\,\mathrm{tang}\,\psi + \frac{b}{\cos\psi^2}, = \frac{t}{\cos\psi} + v\cos\psi\,\mathrm{tang}\,\psi = t\sin\psi\,\mathrm{tang}\,\psi - b\,\mathrm{tang}\,\psi^2 + \frac{b}{\cos\psi^2}$, folglich $x = t\left\{\frac{1 - \sin\psi^2}{\cos\psi}\right\} + v\sin\psi$, oder 2) $x = t\cos\psi + v\sin\psi$. Wenn dieſe beyden Werthe ſtatt x und y in die für die Oberfläche des Körpers gegebene Gleichung geſetzt werden, ſo erhält man die geſuchte Gleichung zwiſchen t, v, und z.

Wenn man $AE = f$ ſetzt, ſo iſt $f = b\,\mathrm{tang}\,\psi$, und man hat $y = v\cos\psi - t\sin\psi - f$.

6. §.

Es bleibe M (1. fig.) ein Punkt auf der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchſchnittsfigur iſt: dieſer Körper werde von einer andern Ebene FH geſchnitten, und es ſey FG ihre Durchſchnittslinie mit der vorigen Ebene KL. Die Gleichung für die Oberfläche des Körpers iſt zwiſchen AP $= x$, PQ $= y$, QM $= z$ gegeben, und die Lage der Ebene FH gegen BC iſt gleichfalls bekannt. *Man ſoll eine Gleichung für die Durchſchnittslinie MN mit der Oberfläche des Körpers für rechtwinklichte Coordinaten ſuchen.*

Aufl. Wenn zwo Oberflächen einander ſchneiden, und man ſucht für jede dieſer Oberflächen eine Gleichung zwiſchen dreyen rechtwinklichten Coordinaten, für einerley Abſciſſenlinie und Anfangspunkt der Abſciſſen, ſo daß auch die Coordinaten x und y für beyde Oberflächen in einerley Ebene liegen; ſo hat man zwo Gleichungen zwiſchen dreyen Coordinaten, welche für die Durchſchnittslinie beyder Oberflächen gehören. Sind nämlich $x =$ AP, $y =$ PQ, $z =$ QM dieſe drey Coordinaten, ſo iſt z in beyden Gleichungen einerley, wenn M ein Punkt iſt, der in beyden Oberflächen zugleich liegt. Iſt alſo die eine Oberfläche FH eine Ebene, die KL unter dem Winkel ϕ ſchneidet, iſt ferner AF $= b$, AFE $= \psi$; ſo drückt die Gleichung $z = b\,\mathrm{ſin}\,\psi\,\mathrm{tg}\,\phi + x\,\mathrm{ſin}\,\psi\,\mathrm{tg}\,\phi + y\,\mathrm{coſ}\,\psi\,\mathrm{tg}\,\phi$ mit der Gleichung für die andere Oberfläche zuſammen genommen die Natur der Durchſchnittslinie MN aus. Allein weil in dieſem Fall MN eine Linie von einfacher Krümmung iſt, ſo iſt es vortheilhafter, eine Gleichung zwiſchen zwoen Coordinaten zu ſuchen, die in der Ebene der Linie MN ſelbſt liegen. In ſolcher Abſicht ziehe man QS auf die Durchſchnittslinie FG beyder Ebenen FH und KL ſenkrecht, und wenn auch AE auf AB ſenkrecht iſt, ſetze man ES $= t$, SM $= v$ AE $= f$. Ferner ſuche man nach dem 5 §. für die Oberfläche des Körpers eine Gleichung zwiſchen t, v und z. Dieß geſchicht, indem man $x = t$

$\cos\psi + v\sin\psi$, und $y = v\cos\psi - t\sin\psi - f$ nimmt, und dieſe Werthe in der Gleichung zwiſchen x y und z ſtatt x und y ſetzt. Nun hat man überdem für die Ebene FH die Gleichung $z = v\operatorname{tang}\phi$, folglich zwo Gleichungen zwiſchen den dreyen Coordinaten t, v, z, für die Linie MN. Setzt man aber AM $= u$, ſo iſt $v = u\cos\phi$. Dieß in die Gleichung zwiſchen t, v und z geſetzt giebt eine andre zwiſchen t, u und z. Ueberdem aber wird $z = u\cos\phi\operatorname{tang}\phi = u\sin\phi$, und wenn man dieß ſtatt z ſetzt, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen t und u. In ſolcher Abſicht kann alſo gleich anfangs in den Werthen von x und y, $u\cos\phi$ ſtatt v geſetzt werden, ſo hat man

$$x = u\cos\phi\sin\psi + t\cos\psi$$

$$y = u\cos\phi\cos\psi - t\sin\psi - f,$$

da dann dieſe beyden Werthe ſtatt x und y, imgleichen $u\sin\phi$ ſtatt z geſetzt, unmittelbar die geſuchte Gleichung zwiſchen t und u geben.

7. §.

Die Länge der Axe *AC* (2. Fig.) des ſchiefen Kegels *BCD*, nebſt dem Halbmeſſer *AB* ſeiner Grundfläche, und dem Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche $= \alpha$ ſind gegeben: man ſoll eine Gleichung zwiſchen dreyen rechtwinklichten Coordinaten für den Kegel ſuchen, ſo daß zwey derſelben in der Ebene der Grundfläche liegen, und die dritte auf ihr ſenkrecht ſteht.

Aufl. Man lege durch die Axe des Kegels eine Ebene auf die Grundfläche ſenkrecht, ſo iſt die Durchſchnittsfigur BCD ein Dreyeck, und in dieſer Ebene liegt der Neigungswinkel BAC $= \alpha$ der Axe gegen die Grundfläche, auf den Durchmeſſer BD der Grundfläche, worinn ſie von der Ebene CBD geſchnitten wird, ſetzte man einen andern $\beta\delta$ ſenkrecht, ſo wird derſelbe auch auf der Ebene BCD ſenkrecht ſeyn. Ferner ſey AL auf der Grundfläche ſenkrecht, ſo liegt AL in der Ebene BCD, und man kann nun $A\beta$, AD, AL, für die drey Axen des Körpers annehmen, womit die drey Coordinaten parallel ſind. Demnach ſey von einem Punkt M der Kegelfläche MQ auf die Grundfläche ſenkrecht gezogen, und QP auf $A\beta$ ſenkrecht. Man ſetze $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. Durch M lege man die Ebene bMd mit der Grundfläche parallel, welche die Axe des Kegels in H, die Ebene BCD in bd, Al aber in L ſchneide, ſo liegt L in bd. Man ziehe die gerade Linie CM, welche in der Oberfläche des Kegels liegt, und mit dem Umfang der Grundfläche in N zuſammen ſtößt. Die Ebene ACN ſchneide bMd in HM, die Grundfläche in AN, und es ſey $AB = AN = r$, $AC = b$, ſo iſt $BAC = AHL = \alpha$, $AL = MQ = z$, folglich $HL = z \cot \alpha$, $AH = z \operatorname{coſec} \alpha$. Ferner iſt $CA : GH = AN : HM$, und $CH = CA - AH$, alſo $HM = \frac{r(b - y \operatorname{coſec} \alpha)}{b}$. Man ziehe LM, AQ, und ſetze MR auf bd ſenkrecht, ſo iſt $LM = AQ = \surd(xx + yy)$. Weil ferner der Winkel $MLR = QAD$, ſo iſt $MR = AP = x$, $LR = PR = y$, und überdem $MR^2 = HM^2 - (HL + LR)^2$. Dieß giebt die Gleichung

$$xx = \frac{rr(b - z \operatorname{coſec} \alpha)^2}{bb} - (z \cot a + y)^2,$$ oder $$xx + yy = \frac{rr(b - z \operatorname{coſec} \alpha)^2}{bb} - zz \cot \alpha^2 - zyz \cot \alpha$$ für den ſchiefen Kegel,

und dieſe Gleichung verwandelt ſich in folgende $bb(xx + yy) = rr(b - z^2$, wenn $\alpha = 90°$, alſo der Kegel ein gerader Kegel iſt.

8. §.

Die Gleichung für den Schnitt des ſchiefen Kegels bey jeder gegebenen Lage der Ebene des Schnitts gegen die Axe und Grundfläche des Kegels zu finden.

Aufl. Es ſey fgh (3. Fig.) die Ebene des Schnitts und fh ihr Durchſchnitt mit der Grundfläche. Man lege durch die Axe AC eine Ebene BCD auf die Grundfläche ſenkrecht, welche die Grundfläche in BD, und fh in E ſchneidet. Auf BD ſey AP als die Axe der Abſciſſen x ſenkrecht, und ſie ſchneide fh in F. Es ſey der Winkel $AFE = \psi$, der Ebene fgh Neigungswinkel gegen die Grundfläche des Kegels $= \phi$, und $AE = f$. Wenn nun M ein Punkt im Kegelſchnitt iſt, ſo ſey MS auf fh ſenkrecht, und $ES = t$, $SM = u$. Nimmt man ferner die Coordinaten y und z des Kegels mit AD und Al parallel, wie in 7. §. ſo hat man die Gleichung $xx + yy = \frac{rr}{bb}(b - z\,\mathrm{coſec}\,\alpha)^2 - zz\cot\alpha^2 - zyz\cot\alpha$. Nach dem bf ſetze man $x = t\cos\psi + u\cos\phi\sin\psi$ und $y = u\cos\phi\cos\psi - t\sin\psi - f$, $z = u\sin\phi$. Wenn man dieſe Werthe in die Gleichung des Kegels ſtatt x und y, und z, und der Kürze wegen $\frac{r}{b} = m$ ſetzt, ſo erhält man für den Kegelſchnitt die Gleichung

$$\begin{array}{l} tt - z\sin\psi\sin\phi\cot\alpha \,.\, tu + \cos\phi^2 \,.\, uu - zf\cos\phi\cos\psi \,.\, u \\ \qquad\qquad\qquad + \sin\phi^2\cot\alpha^2 \qquad\qquad + zm^2 b\,\mathrm{coſec}\,\alpha\sin\phi \\ \qquad\quad + z\cos\phi\cos\psi\sin\phi\cot\alpha \qquad - zf\sin\phi\cot\alpha \\ \qquad\qquad - m^2\,\mathrm{coſec}\,\alpha^2\sin\phi^2 \\ + zf\sin\psi \,.\, t + ff - m^2 b^2 = 0. \end{array}$$

Dieſe Linie gehört zur zweyten Ordnung, und wenn man die Coefficienten von uu, tu, und tt mit P, Q, R, bezeichnet, ſo weis man aus andern Gründen, daß der Schnitt eine Ellipſe Parabel oder Hyperbel ſey, nachdem $4PR - QQ$ poſitiv, oder $= o$, oder negativ iſt. Es wird aber $4P.R - QQ = 4(\cos\phi + \sin\phi\cos\psi\cot\alpha)^2 - 4m^2\,\mathrm{coſec}\,\alpha^2\sin\phi^2$. Daher wird der Schnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel ſeyn, nachdem

$bb(\cos\phi = \sin\phi\cos\psi\cot\alpha)^2 > =$ oder $< rr\,\mathrm{coſec}\,\alpha^2\sin\phi^2$ oder $b\cos\phi > =$ oder $< r\,\mathrm{coſec}\,\alpha\sin\phi - b\sin\phi\cos\psi\cot\alpha$ oder $\frac{b}{r\,\mathrm{coſec}\,\alpha - b\cos\psi\cot\alpha} > =$ oder $< \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, oder auch $\frac{b\sin\alpha}{r - b\cos\psi\cos\alpha}$. $> =$ oder $< \mathrm{tang}\,\phi$

Wenn nun die Abſciſſenlinie ES den Umfang der Grundfläche in *f* und *h* trift, ſo halbire man *fh* bey *e*, und ziehe durch A und *e* den Durchmeſſer *bd* der Grundfläche, welcher auf *fk* ſenkrecht iſt; ſo wird die Ebene *bld* durch *bd* und die Axe *Al* gelegt die Ebene des Schnitts *fgh* in der geraden Linie *eg* ſchneiden. Ueberdem ſchneidet die ſenkrechte Ebene BCD durch die Axe die Ebene des Schnitts in ES, beyde Durchſchnittslinien ſchneiden die Axe, und folglich einander ſelbſt in dem Punkt K, worinn die Ebene des Schnitts und die Axe des Kegels einander ſchneiden. Nun hat man an A ein körperliches Dreyeck, deſſen Seitenflächen EA*e*, EAK, und *e*AK ſind, deſſen Seiten und Winkel ſich bekannter maſſen wie die Seiten und Winkel ſphäriſcher Dreyecke berechnen laſſen. Weil die Ebene AEK auf der Grundfläche ſenkrecht iſt, ſo iſt dieß Dreyeck an AE rechtwinklicht, und *e*AK die Hypothenuſe. Da nun $\mathrm{EA}e = \mathrm{AFE} = \psi$, $\mathrm{EAK} = \alpha$, ſo iſt $\cos e\mathrm{AK} = \cos\alpha\cos\psi$, und wenn ε der Winkel an A*e* iſt, unter welchem C*bd* die Grundfläche ſchneidet, ſo iſt $\cot\varepsilon = \sin\psi\cot\alpha$. Ueberdem iſt auch *e* die Spitze eines körperlichen Dreyecks, deſſen Seiten $\mathrm{A}e\mathrm{E} = 90°$ iſt, der Winkel an $e\mathrm{A} = \varepsilon$, und an $e\mathrm{E} = \phi$. Alſo wird $\mathrm{tang}\;\mathrm{E}e\mathrm{K} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon\sin\phi} = \frac{\mathrm{tang}\,\varepsilon}{\sin\phi} = \frac{1}{\sin\psi\sin\phi\cot\alpha}$, und $\operatorname{tang} AeK = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi \sin\varepsilon} = \frac{\operatorname{tang}\Phi}{\sin\varepsilon}$. Da nun $\operatorname{cosec}\varepsilon = \sqrt{(1+\cot\varepsilon^2)}$ $= \sqrt{(1+\sin\psi^2 \cot\alpha^2)}$ ſo iſt $\sin\varepsilon = \frac{1}{\operatorname{cosec}\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sin\psi^2 \cot\alpha^2)}}$, alſo $\operatorname{tang} AeK = \operatorname{tang}\Phi \sqrt{(1+\sin\psi^2 \cot\alpha^2)} = \frac{\operatorname{tang}\Phi\sqrt{(1-\cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{\sin\alpha}$.

Aber im Dreyeck ABC iſt $\operatorname{tang} AbC = \frac{b \sin CAb}{b \cos CAb}$, und es war $\cos AK = \cos CAb = \cos\alpha \cos\psi$, alſo hie $CAb = \sqrt{(1-\cos\alpha^2 \cos\psi^2)}$, folglich wird $\operatorname{tang} AbC = \frac{b\sqrt{(1-\cos\alpha^2 \cos\psi^2)}}{r - b\cos\alpha\cos\psi}$.

Nachdem nun $\operatorname{tang} Abl >=$ oder $< \operatorname{tang} AlK$, nachdem iſt $\frac{b\sin\alpha}{r - b\cos\alpha\cos\psi} >=$ oder $< \operatorname{tang}\Phi$, folglich wird der Schnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel, nachdem $AbC >=$ oder $< AeK$ iſt.

9. §.

Die Durchſchnittlinie *ge* (3. Fig.) der Ebene des Schnitts *fgh* mit der Ebene *brd*, welche durch die Axe *AC* ſo gelegt iſt, daß ſie *fh* halbirt, iſt ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts, und die mit *fh* parallelen Coordinaten ſind ihm zugeordnet.

Beweis. Der Coefficient von mm in der allgemeinen Gleichung des vor. §. läßt ſich ſo ausdrücken $\cos\Phi^2 + 2\cos\Phi\cos\psi\sin\Phi\cot\alpha + \sin\Phi^2\cot\alpha^2 (\sin\psi^2 \cos\psi^2) - m^2 \sin\Phi^2 \operatorname{cosec}\alpha^2 = (\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\cot\alpha)^2 + \sin\Phi^2 \sin\psi^2 \cot\alpha^2 - m^2 \sin\Phi^2 \operatorname{cosec}\alpha^2$. Man ſetze $\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\cot\alpha = K$, $\cos\Phi\cos\psi + \sin\Phi\cot\alpha = g$, $m\sin\Phi\operatorname{cosec}\alpha = h$, $mb = r$.

Nun war im vor. §. $\mathrm{tang}\, EeK = \frac{1}{\sin\phi \sin\psi \cot\alpha}$; wenn man alſo den Winkel $EeK = \eta$ ſetzt, ſo wird $\sin\phi \sin\psi \cot\alpha = \cot\eta$. Dieſe Werthe ſetze man in die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt, ſo erhält man
$tt = 2 \cot\eta, tu + (\cot\eta^2 + kk - hh).\, uu + 2(rk - fg)\, u + 2f \sin.\, t + ff - rr = 0.$

Nun iſt $Ee = f \sin\psi$; wenn man alſo $eS = T$ ſetzt, ſo wird $T = f \sin\psi + t$, und $t = T - f \sin\phi$. Dieß ſtatt t geſetzt giebt die Gleichung $(T - \cot\eta.\, u)^2 + (kk - hh)\, uu + 2\, (f \cot\eta \sin\psi + (7h - fg)\, u + f^2 \cos\psi^2 - rr = 0$. Man ziehe MS (3. und 4. Fig.) mit eK parallel, ſo iſt der Winkel $MsS = EeK = \eta$, und dieſer Winkel iſt wenigſtens ſo lange ſpitz, als α nicht über 90° groß iſt, ϕ und ψ aber kleiner als 180° ſind, weil $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$. Da nun in der Gleichung $\alpha < 90°$ angenommen iſt; ſo iſt auch η ſpitz, und s fällt zwiſchen e und S, ſo daß $es = eS - Ss$ wird. Setzt man nun $es = X$, $Ms = V$, ſo wird $u = V \sin\eta$, und $sS = u \cot\eta = V \cos\eta$, folglich $X = T - u \cot\eta$. Dieſe Werthe in die vorige Gleichung geſetzt geben
$X^2 + (kk - hh) \sin\eta^2.\, V^2 + 2\, (f \cos\eta \sin\psi + (rk - fg) \sin\eta\, V + f^2 \cos\psi^2 - rr = 0$. In dieſer Gleichung kann man die Coordinaten X und V verwechſeln. Wenn nämlich Mp mit fh parallel iſt, ſo wird $ep = V$, und $pM = X$; dann aber gehören zu jeder Abſciſſe ep zwo gleiche und entgegen geſetzte Coordinaten. Daraus folgt, daß ge ein Durchmeſſer ſey, und daß die mit fh parallelen Coordinaten ihm zugeordnet ſeyn.

10. §.

Die Größe der beyden halben Durchſchnittsmeſſer zu finden, wovon der eine in ge fällt, und der andre mit fh parallel iſt.

Aufl. Man ſetze der Kürze wegen A, $2B$, C, ſtatt der dreyen Coefficienten in der letzten Gleichung zwiſchen X und V, ſo hat man $X^2 + A.V^2 + 2B.V + C = o$. Nun ſuche man die Werthe von V, wenn $X = d$ iſt, ſo findet man aus der Gleichung $V + \frac{2B}{A}.V = -\frac{C}{A}$ folgende Wurzeln $V = -\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$. Hieraus ergiebt ſich, daß der Mittelpunkt des Kegelſchnitts um den Abſtand $-\frac{B}{A}$ von e entfernt ſey, und unterhalb e liege, wenn $\frac{B}{A}$ poſitiv iſt. Ziehet man nun durch den Mittelpunkt eine neue Abſciſſenlinie mn mit fh parallel, ſo wächſt (4. Fig.) die Ordinate $Mx = V$ um das Stück $ec = \frac{B}{A}$. Setzt man alſo die neue Ordinate $cy = Y$, ſo wird $V = Y - \frac{B}{A}$, und dieſer Werth in die obige Gleichung für den Kegelſchnitt geſetzt giebt folgende: $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A}X^2$. Daher iſt die Hälfte des mit fh parallelen Durchmeſſers $em = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{\sqrt{A}}$

$$= \frac{\sqrt{(f \sin\psi \cos\eta + (rh - fg)\sin\eta)^2 - (kk - hh)(ff\cos\psi^2 - rr)}}{\sqrt{(kk - hh)}},$$

und die Hälfte des zugehörigen Durchmeſſers $eg = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A} =$

$$\frac{\sqrt{(C f \sin\psi \cos\eta + (rh - fg)\sin\eta)^2 - (kk - hh)(ff\cos\psi^2 - rr)}}{kk - hh}.$$

11. §.

Die Geſtalt des Kegelſchnitts zu finden, wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Kegels ſenkrecht iſt.

Aufl. Wenn EF (3. Fig.) mit AF parallel, alſo $\psi = 0$ iſt, ſo fällt e in E, und EF iſt auf BD folglich auf die Ebene BCD ſenkrecht, ſo daß nun $AEK = \phi$ wird, und $\eta = EeK = fEK = 90°$. Wenn demnach überdem der Winkel AKE (2. Fig.) = 90° iſt, ſo iſt die Ebene Fsf auf der Axe des Kegels ſenkrecht. Man ſetze alſo (2. Fig.) $\psi = 0$, und $AKE = 90°$, ſo wird $\phi = 90° - \alpha$. Dieſe Vorausſetzungen geben $k = g = \cos\psi + \sin\phi \cot\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha$, und $h = m \cos\alpha\ \mathrm{cosec}\,\alpha = m \cot\alpha$. Folglich wird $A = gg - hh = \mathrm{cosec}\,\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2$, $B = rh - fg = mr\cot\alpha - f\,\mathrm{cosec}\,\alpha$, $C = ff - rr$. Man ſetze dieſe Worte in die Gleichung $x^2 + A.V^2 + rB.V + C = 0$, ſo ergiebt ſich die Gleichung

$X^2 + (\mathrm{cosec}\,\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2)V^2 + 2(mr\cot\alpha - f\,\mathrm{cosec}\,\alpha)V + ff - rr = 0$. oder $V^2 + \frac{2(mr\cot\alpha - f\,\mathrm{cosec}\,\alpha)V}{\mathrm{cosec}\,\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{rr - ff - X^2}{\mathrm{cosec}\,\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2}$. Nun iſt in der 2. Fig. GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts iſt, ſo wird $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{f\,\mathrm{cosec}\,\alpha - mr\cot\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha - mr\sin\alpha\cos\alpha}{1 - m^2\cos\alpha^2}$. Nachdem alſo dieſer Ausdruck poſitiv oder negativ iſt, fällt c oberhalb oder unterhalb Ff. Nimmt man die Abſciſſen auf dem mit Ff parallelen Durchmeſſer, ſo erhält man $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1\,X^2}{A}$ (10. §.), und im gegenwärtigen Fall wird $B^2 - AC = (rhfg)^2 - (gg - hh)(ff - rr) = (rg - fh)^2 = (r\,\mathrm{cosec}\,\alpha - mf\cot\alpha)^2 X^2$

alſo $Y^2 = \frac{(r \operatorname{cosec} \alpha - mf \cot \alpha)^2}{(\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2)^2} \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2} X^2$, oder $Y^2 = \frac{(r \sin \alpha^2 - mf \cos \alpha \sin \alpha)^2}{(1 - m^2 \cos \alpha^2)^2} \; \frac{\sin \alpha^2}{1 - m^2 \cos \alpha^2} X^2$. Demnach iſt die halbe Zwergaxe $= \frac{r \sin \alpha - mf \cos \alpha \sin \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2}$ $= \frac{r b \sin \alpha\, (b - f \cos \alpha)}{bb - rr \cos \alpha^2}$, und die halbe conjungirte Axe, $= \frac{r - mf \cos \alpha}{\sqrt{(1 - m^2 \cos \alpha^2}} = \frac{r\, (b\, \text{ſ}\cos \alpha)}{\sqrt{(bb - rr \cos \alpha^2}}$. Nachdem alſo die Geſtalt des Kegels ſo oder anders beſchaffen iſt; kann der Schnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel ſeyn. Es werden nemlich dieſe drey Fälle ſtatt haben, nachdem $b > = $ oder $< r \cos \alpha$ iſt. Man hat aber *tang* $ACB = \frac{r \sin \alpha}{b - r \cos \alpha}$. Nachdem alſo ACB ein ſpitzer, ein rechter, oder ein ſtumpfer Winkel iſt, nachdem iſt der Schnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel. Folglich iſt der Schnitt nicht allemal eine Ellipſe, und auch in dem Fall, wenn ACB ſpitz iſt, fällt der Mittelpunkt der Ellipſe nie in die Axe des Kegels.

Soll nämlich das letztere erfolgen, ſo muß $Ec = EK$ ſeyn. Da nun $EK = f \sin \alpha$ iſt, ſo müßte $\frac{f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2} = f \sin \alpha$ ſeyn. Hieraus folgt $f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha = f \sin \alpha - m^2 f \sin \alpha \cos \alpha^2$, oder $r \sin \alpha \cos \alpha = m f \sin \alpha \cos \alpha^2$, folglich $r = mf \cos \alpha$, oder $b = f \cos \alpha$, und $f = b \sec \alpha$. In dieſem Fall alſo müßte der Schnitt durch die Spitze des Kegels gehen. Es iſt nämlich $AK = f \cos \alpha$; alſo wäre in dieſem Fall $AK = AC$. Daher kann der Mittelpunkt der Ellipſe gar nicht in die Axe fallen, wie denn auch in eben dieſem Falle beyde Hauptaxen $= o$ werden, ſo daß die Ellipſe in einem Punkte zuſammen geht. Hindurch wird alſo dasjenige beſtätiget, was im 3. §. behauptet worden.

12. §.

Wenn in der allgemeinen Gleichung für den Kegelſchnitt (8. §.) $b = \infty$, alſo $\frac{r}{b} = m = o$ geſetz wird, ſo hat man die allgemeine Gleichung für den Schnitt eines ſchiefen Cylinders, deſſen Axe gegen die Grundfläche unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt iſt. Die Gleichung ſelbſt wird folgende.

$$\begin{array}{l} tt - 2\sin\phi\sin\psi\cot a\, tu + \cos\phi^2 uu - 2f\cos\phi\cos\psi\, u + 2f\sin\psi\, t + ff = 0. \\ \quad + 2\cos\phi\cos\psi\sin\phi\cot\alpha \qquad - 2f\sin\phi\cot\alpha \qquad\qquad - rr \\ \qquad + \sin\phi^2\cot\alpha^2 \end{array}$$

Der Schnitt iſt allemal eine Ellipſe, weil $(\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2$ allemal poſitiv iſt. In dem Fall, wenn dieſer Ausdruck $= o$ wäre, hätte man $\cot\phi = -\cos\psi\cot\alpha$. Aber $\mathrm{tang}\ AeK = \frac{\mathrm{tang}\,\phi\sqrt{(1 - \cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{\sin\alpha} = \frac{-\sqrt{(1 - \cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{\cos\psi\cos\alpha}$, und $\mathrm{tang}\ Abc = \frac{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{\cos\psi\cos\alpha}$, folglich $AeK = AbC$. Dies iſt der Fall, da im Kegel der Schnitt eine Parabel ſeyn würde, woraus hier ein Syſtem zwoer grader und paralleler Linien wird, wie den Eigenſchaften des Cylinders gemäß iſt, und die Gleichung am kürzeſten ergiebt, wenn man wie im 9. §. den Anfangspunkt der Abſciſſen in *e*, und die Ordinaten mit *gd* parallel nimmt.

Es verwandelt ſich nämlich die letzte Gleichung des 9. §. in folgende
$X^2 + kk \sin \eta^2 V^2 + 2f(\cos \eta \sin \psi - g \sin \eta) V + f^2 \cos \psi^2 - rr = 0$, weil $h = 0$ wird. Ueberdem iſt $k = \cos \phi + \sin \phi \cos \psi \cot \alpha = 0$, alſo auch $\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \cot \alpha - \sin \phi \cot \alpha \sin \psi^2 = 0$. Weil nun $\sin \phi \sin \psi \cot \alpha = \cot \eta$, ſo wird, $g - \cot \eta \sin \psi = 0$, oder $\cos \eta \sin \psi - g \sin \eta = 0$. Daher erhält man die Gleichung $X^2 + f^2 \cos \psi^2 - rr = 0$, und V wird nicht durch X beſtimmt. Aber es wird $X = \pm \surd rr - f^2 \cos \psi^2) = \pm ef$.

13. §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Cylinders ſenkrecht iſt, ſo wird die Gleichung ſo verändert $V^2 - 2f \sin \alpha. V = (rr - ff - X^2) \sin \alpha^2$. Ueberdem wird GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts iſt, ſo wird $Ec = f \sin \alpha = EK$, ſo daß der Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt. Setzt man alſo $Y = V - f \sin \alpha$, ſo erhält man die Gleichung $Y^2 = rr \sin \alpha^2 - X^2 \sin \alpha^2$, und es wird die Hälfte der mit Ff parallelen Axe $= r$, die Hälfte der conjugirten Axe $= r \sin \alpha$. Der ſchiefe Cylinder hat alſo die Eigenſchaft, daß alle durch ſeine Axe ſenkrecht geführten Schnitte Ellipſen werden, deren Mittelpunkte in des Cylinders Axe fallen. Man könnte daher dieſe Eigenſchaft mit H. Euler Introd. in Anal. inf. Append. Cap. III. §. 52. für die Erklärung des ſchiefen Cylinders annehmen, wenn es nicht aus andern Gründen beſſer wäre, die gewöhnliche beyzubehalten, deſſen zu geſchweigen, daß bey dieſer letzten Erklärung die Betrachtung des ſchiefen Cylinders aus den Anfangsgründen ganz wegbleiben müßte.

Uebrigens erhält man aus dem 10. §. $B = f(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)$, $A = (\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2 = kk$, $C = f^2 \cos\psi^2 - rr$. Rechnet man alſo die Abſciſſen vom Mittelpunkt, ſo wird die allgemeine Gleichung dieſe:

$$Y^2 = \frac{f^2(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}{K^4} - \frac{1}{K^2} X^2$$

Die Hälfte des mit fh parallelen Durchmeſſers iſt $= \frac{\surd(f^2 \cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}{K}$, und man hat die Hälfte des zugehörigen Durchmeſſers, wenn man jenen Ausdruck mit $\frac{1}{K}$ multiplicirt, da denn η der Conjugationswinkel iſt, und $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$.

14. §.

Wenn die Geſtalt des Kegels gegeben iſt, alſo r, b, und α, bekannt ſind, zu finden, wie groß die Winkel ϕ und ψ genommen werden müſſen, damit der Kegelſchnitt ein Kreis werde.

Aufl. Die Durchſchnittslinie der Ebene des Schnitts mit derjenigen Ebene durch die Axe, welche die Durchſchnittslinie der Ebene des Schnitts und der Grundfläche halbirt, iſt allemal ein Durchmeſſer des Kegelſchnitts, und die ihm zugehörigen Ordinaten ſind mit der Grundfläche parallel. So lange nun der Conjugationswinkel ein ſchiefer Winkel iſt, kann der Schnitt kein Kreis ſeyn, weil der Kreis keine ſolche zuſammengehörige Durchmeſſer hat, die ſich unter einem ſchiefen Winkel ſchneiden. Damit alſo der Kegelſchnitt ein Kreis werde, wird allemal erfordert, daß der Conjugationswinkel $EeK = \eta = 90°$ ſey. Alſo muß $\cot\eta = \sin\phi$

$\sin\psi \cot\alpha = 0$ ſeyn. Weil nun nicht $\cot\alpha = 0$ ſeyn kann, wenn der Kegel ein ſchiefer Kegel iſt, ſo iſt entweder $\sin\phi = 0$ oder $\sin\psi = 0$. Im erſten Fall iſt der Schnitt mit der Grundfläche parallel, und es iſt aus den Anfangsgründen bekannt, daß alsdann der Schnitt ein Kreis ſey. Wenn nun ϕ nicht $= 0$ iſt, ſo muß $\psi = 0$, folglich fh auf BD ſenkrecht, und die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene BCD der Axe des Kegels gegen die Grundfläche ſenkrecht ſeyn. Damit nun in dieſem Fall der Schnitt ein Kreis werde, wird überdem erfordert, daß die beyden Durchmeſſer, woran der eine mit fh parallel, der andre auf fh ſenkrecht iſt, gleich groß ſeyn, wobey übrigens vorausgeſetzt wird, daß AEK $<$ ABC ſey, damit der Schnitt in die Klaſſe der Ellipſen gehöre. In dem Fall nämlich, wenn (2. Fig.) AEK $>$ ABC iſt, würde die Vorausſetzung, daß die Axen gleich ſeyn ſollen, eine gleichſeitige Hyperbel geben. Gehört aber der Schnitt in die Klaſſe der Elipſen, ſo werden ihre Axen gleich, und der Schnitt wird ein Kreis, wenn in der Gleichung $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A}X^2$ (10. §.) $A = 1$ iſt, Es war aber $A = kk - hh$, und wenn man aus dem 9 §. die daſigen Werthe ſtatt k und h wieder herſtellt, aber $\sin\psi = 0$, und $\cos\psi = 1$ ſetzt, ſo erhält man $k = g = \cos\phi + \sin\phi \cot\alpha$, $h = m \sin\phi \operatorname{cosec}\alpha$, und man findet ϕ aus der Gleichung $\cos\phi^2 + 2\cos\phi \sin\phi \cot\alpha + \sin\phi^2 \cot\alpha^2 - m^2 \sin\phi^2 \operatorname{casec}\alpha^2 = 1$. Dividirt man nämlich mit $\cos\phi^2$, ſo wird $(\cot\alpha^2 - m^2 \operatorname{cosec}\alpha^2) \operatorname{tang}\phi^2 + 2\cot\alpha \operatorname{tang}\phi = \operatorname{tang}\phi^2$, und von dieſer Gleichung iſt die eine Wurzel $\operatorname{tang}\phi = 0$ für den Fall, wenn die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche parallel iſt. Die andere Wurzel giebt ſich aus der Gleichung $2\cot\alpha = (1 - \cot\alpha^2 + m^2 \operatorname{cosec}\alpha^2) \times \operatorname{tang}\phi$, oder wenn man mit $\sin\alpha^2$ multiplicirt $2\cos\alpha \sin\alpha = (\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2 + m^2 \operatorname{tang}\phi$, folglich $\operatorname{tang}\phi$

$$= \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{m^2 - (\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)} = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}.$$

Wenn man in dem Ausdruck $tang\,\phi = \frac{2\,ſin\,\alpha\;coſ\,\alpha}{m^2 - coſ\,\alpha^2 + ſin\,\alpha^2}$ Zehler und Nenner durch $m^2 - coſ\,\alpha^2$ dividirt, ſo erhält man $tang\,\phi = \frac{2\,ſin\,\alpha\;coſ\,\alpha}{m^2 - coſ\,\alpha^2} : (1 + (\frac{ſin\,\alpha^2}{m^2 - coſ\,\alpha^2}) =$ $(\frac{ſin\,\alpha}{m - coſ\,\alpha} - \frac{ſin\,\alpha}{m + coſ\,\alpha}) : (+\frac{ſin\,\alpha}{m - coſ\,\alpha} \times \frac{ſin\,\alpha}{m + coſ\,\alpha})$. Es iſt aber $tang$ ABC $= \frac{b\,ſin\,\alpha}{r - b\,coſ\,\alpha} = \frac{ſin\,\alpha}{m - coſ\,\alpha}$, und $tang$ ADC $= \frac{b\,ſin\,\alpha}{r + coſ\,\alpha} = \frac{ſin\,\alpha}{m + coſ\,\alpha}$. Folglich wird $tang\,\phi =$ $\frac{tang\ ABC - tang\ ADC}{1 - tang\ ABC\ tang\ ADC}$, oder $tang\,\phi = tang\,(ABC - ADC)$, alſo $\phi = ABC - ADC$, und $ABC = \phi + ADC = CGE$. Dies iſt alſo die ſectio coni ſubcontraria der Alten (Apollon. Con. Lib. I. Prop. V.) und es erhellet zugleich aus der bisherigen Analyſi, daß kein andrer Schnitt, als die ſectio ſubcontraria einen Kreis geben könne, dafern nicht die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche des Kegels parallel iſt (Apoll. Con. Lib. I. Prop. IX.)

15. §.

Man ſetze nun in den Formuln des 10. §. $\psi = 0$, alſo $ſin\,\psi = 0$, $coſ\,\psi = 1$, $cot\,\eta = 0$, $coſ\,\eta = 0$, $ſin\,\eta = 1$, ſo wird $A = gg - hh$, $B = rh - fg$, $C = ff - rr$, folglich $\frac{B^2 - AC}{A^2}$ $= \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2}$, und man erhält für den auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche ſenkrechten Schnitt dieſe allgemeine Gleichung $Y^2 = \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} - \frac{1}{gg - hh}X^2$, die Abſciſſen vom Mittelpunkt auf der mit Ff parallelen Axe gerechnet; und wenn c der Mittelpunkt iſt, ſo hat man $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{fg - rh}{gg - hh}$. Setzt man aus dem 9. §. ſtatt g und h ihre dortigen Werthe, ſo wird $\frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} = \frac{(r(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha) - fm\sin\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha)^2}{(l\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\phi^2\,\mathrm{cose}\,\alpha^2)^2}$ $= \frac{(r\sin(\alpha + \phi) - fm\sin\phi)^2\sin\alpha^2}{(\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2)^2}$, und $\frac{1}{gg - hh} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2}$. Folglich erhält man die Gleichung $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha + \phi) - fm\sin\phi)^2\sin\alpha^3}{(\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2)^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2}X^2$. Ueberdem wird $Ec = \frac{f(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha) - rm\sin\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\phi^2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha\sin(\alpha + \phi) - rm\sin\phi\sin\alpha}{\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2}$.

Wenn nun $gg - hh = 1$, alſo der Schnitt ein Kreis iſt, ſo wird $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha + \phi) - fm\sin\phi)^2}{\sin\alpha^2} - X^2$, weil $\sin(\alpha + \phi)^2 - m^2\sin\phi^2 = \sin\alpha^2$ wird, alſo iſt der Halbmeſſer des Kreiſes $= \frac{r\sin(\alpha + \phi) - fm\sin\phi}{\sin\alpha}$ und $Ec = \frac{f\sin(\alpha + \phi) - rm\sin\phi}{\sin\alpha}$, da denn $\phi = ABC - ADC$ ſeyn muß.

16. §.

Wenn die Axe des Kegels $b = \infty$, alſo aus dem Kegel ein Cylinder wird, ſo iſt $m = 0$, und man hat für den auf die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche ſenkrechten

Schnitt die Gleichung $Y^2 = rr - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\phi)^2} X^2$, und $Ec = \frac{f \sin\alpha}{\sin(\alpha+\phi)}$. Damit der Schnitt ein Kreis werde, muß $\mathrm{tang}\,\phi = -\mathrm{tang}\,2\alpha$, alſo $\phi = 180^\circ - 2\alpha$ ſeyn. Folglich wird $EKA = 180^\circ - \phi - \alpha = \alpha$, und $EK = EA = f$. Nun wird ferner $\alpha + \phi = 180^\circ - \alpha$, alſo $\sin(\alpha+\phi) = \sin\alpha$, und dies giebt $Ec = f$. Demnach fällt der Mittelpunkt des Kreiſes in die Axe des Cylinders, und ſein Halbmeſſer iſt dem Halbmeſſer der Grundfläche gleich. Es wird nämlich die Gleichung ſo verändert $Y^2 = rr - X^2$.

17. §.

Dafern die Axe des Kegels dem Halbmeſſer ſeiner Grundfläche gleich, alſo $r = b$ und $m = 1$ iſt; ſo liegen die drey Punkte B, C, D. im Umfang eines Halbkreiſes, über BD, folglich iſt $BCD = 90^\circ$, und $ADC = 90^\circ - ABC$. Wird nun $\phi = ABC - ADC$ genommen, ſo iſt $\phi = ABC - 90^\circ$, $AKE = 180^\circ - (\alpha+\phi)$, und $\alpha = 180^\circ - 2ABC$, folglich $AKE = 90^\circ$, und der Schnitt iſt auf des Kegels Axe ſenkrecht. Wenn demnach $r = b$ iſt, ſo giebt jeder auf die Axe ſenkrechte Schnitt einen Kreis. Da nun in eben dieſem Fall $\alpha + \phi = 90^\circ$ iſt, ſo wird $\sin\phi = \cos\alpha$, und $\cos\phi = \sin\alpha$. Demnach fällt der Mittelpunkt in c, wenn $Ec = \frac{f - r\cos\alpha}{\sin\alpha}$ genommen wird, und der Halbmeſſer des Kreiſes wird $= \frac{r - f\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Fällt überdem in eben dieſem Fall der Mittelpunkt der Grundfläche in die Ebene des Schnitts, ſo gehet Ff durch A und es iſt $AE = f = 0$, alſo $Ec = -r\cot\alpha$, und der Halbmeſſer des Kreiſes $= \frac{r}{\sin\alpha} = r\,\mathrm{coſec}\,\alpha$.

18. §.

Dieß iſt der Fall der ſtereographiſchen Projection der Meridiane der Kugel, wenn die Tafel ſelbſt ein Meridian iſt, wofür man gewöhnlich den erſten Meridian annimmt, und das Auge im Pol dieſes Meridians ſtehet. (Man vergleiche nun hiemit die Abhandlung von den Projectionen der Kugel, worauf ich in der Folge allemal der Kürze wegen unter dem Namen der **vorigen Abhandlung** verweiſen werde.) Wenn der Meridian PLQ (6. Figur der **vorigen Abhandlung**) die Tafel GPHQ unter dem Winkel $GTF = CTl$ ſchneidet, ſo iſt dieſer Winkel $= 90° - OTl$, und OTl iſt der Neigungswinkel der Axe des optiſchen Kegels gegen ſeine Grundfläche, der in der bisherigen Ausführung $= \alpha$ geſetzt iſt. In der **vorigen Abhandlung** war $GTF = \gamma$, alſo iſt hier $\cot\alpha = \operatorname{tang}\gamma$, und $\operatorname{coſec}\alpha = \operatorname{ſec}\gamma$. Dies giebt den Halbmeſſer der Projection $= r \operatorname{ſec}\gamma$, und ſeinem Abſtand von PQ, oder $TC = -r \operatorname{tang}\gamma$, wie im 16. §. **voriger Abhandlung**.

19. §.

Die ſtereographiſche Horizontal-Projection der Meridiane (21. §. der **vorigen Abhandlung**) gehört ebenfalls hieher, wenn die Tafel der Horizont des Punkts (5. Fig.) Z iſt, und das Auge im Nadir ſtehet. Man lege durch OT als die Axe des Kegels eine Ebene *Obd* auf den Meridian *bpdq* als des Kegels Grundfläche ſenkrecht, und die Durchſchnittslinie mit dem Meridian ſey *bd*; ſo iſt OTb der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche, welcher bisher $= \alpha$ geſetzt iſt, und ſein Maas iſt der Bogen Ob eines größten Kreiſes der Kugel. Wenn nun, wie im 21. §. der **vorigen Abhandlung**, die Breite des Orts $Z = \lambda$ und der Stundenwinkel $LpZ = \phi$ geſetzt wird, ſo iſt im ſphäriſchen Dreyeck Obq die Seite $Ob = \alpha$, $Oq = 90° - \lambda$ und der Winkel

$Oqb = LpZ = \Phi$. Bey b aber iſt ein rechter Winkel, folglich wird $\mathrm{ſin}\,\alpha = \mathrm{coſ}\,\lambda\,\mathrm{ſin}\,\Phi$, und $\mathrm{coſec}\,\alpha = \frac{1.}{\mathrm{coſ}\,\lambda\,\mathrm{ſin}\,\Phi} = \mathrm{ſec}\,\lambda\,\mathrm{coſec}\,\Phi$. Dieß giebt den Halbmeſſer der Projection $r\,\mathrm{coſec}\,\alpha = r\,\mathrm{ſec}\,\Phi\,\mathrm{coſec}\,\lambda$, wie im 21. §. **voriger Abhandlung.**

20. §.

Um auch die Lage des Mittelpunkts C der Projection auf der Tafel zu finden ſchließe man ſo. Die Ebene O*bd* ſchneide die Tafel in TG, ſo iſt G ein Scheitel des Kegelſchnitts, wenn G in O*d* liegt. Ueberdem ſey N*n* die Durchſchnittslinie der Tafel und der Grundfläche des Kegels, ſo iſt TG auf *Nn* ſenkrecht, und der Mittelpunkt C liegt in GT. Um ihn zu finden, muß man TC $= -r\,\mathrm{cot}\,\alpha$ nehmen (17. §.). Es war aber $\mathrm{coſec}\,\alpha = \mathrm{ſec}\,\lambda\,\mathrm{coſec}\,\Phi$, alſo wird $\mathrm{cot}\,\alpha = \sqrt{}(\mathrm{ſec}\,\lambda^2\,\mathrm{coſec}\,\Phi^2 - 1)$, und $\mathrm{TC} = -r\sqrt{}(\mathrm{ſec}\,\lambda^2\,\mathrm{coſec}\,\Phi^2 - 1)$. Weil nun $\mathrm{ſec}\,\lambda^2\,\mathrm{coſec}\,\Phi^2 - 1 = \mathrm{coſec}\,\Phi^2 + \mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{coſec}\,\Phi^2 - 1 = \frac{1 + \mathrm{tang}\,\lambda^2 - \mathrm{ſin}\,\Phi^2}{\mathrm{ſin}\,\Phi^2} = \frac{\mathrm{tang}\,\lambda^2 + \mathrm{coſ}\,\Phi^2}{\mathrm{ſin}\,\Phi^2}$ $= \frac{\mathrm{tang}\,\lambda^2\,(\mathrm{ſin}\,\Phi^2 + \mathrm{coſ}\,\Phi^2) + \mathrm{coſ}\,\Phi^2}{\mathrm{ſin}\,\Phi^2} = \frac{\mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{ſin}\,\Phi^2 + \mathrm{ſec}\,\lambda^2\,\mathrm{coſ}\,\Phi^2}{\mathrm{ſin}\,\Phi^2}$ $= \frac{\mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\Phi^2 + \mathrm{ſec}\,\lambda^2}{\mathrm{tang}\,\Phi^2}$; ſo wird $\mathrm{TC} = -r$ $\frac{\sqrt{}(\mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\Phi^2 + \mathrm{ſec}\,\lambda^2}{\mathrm{tang}\,\Phi^2}$. Ferner iſt das ſphäriſche Dreyeck B*p*N bey B rechtwinklicht, und die Seite $Bp = \lambda$, der Winkel $BpN = \Phi$, folglich $\mathrm{tang}\,\mathrm{BN} = \mathrm{ſin}\,\lambda\,\mathrm{tang}\,\Phi = \mathrm{cot}\,\mathrm{BTG} = \mathrm{cot}\,\mathrm{DTC}$. Das giebt $\mathrm{ſin}\,\mathrm{DTC} = \frac{1.}{\sqrt{}(1 + \mathrm{ſin}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\Phi^2)} =$ $\sqrt{\frac{1 : \mathrm{coſ}\,\lambda^2}{1 : \mathrm{coſ}\,\lambda^2 + \mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\Phi^2}} = \frac{\mathrm{ſec}\,\lambda}{\sqrt{}(\mathrm{ſec}\,\lambda^2 + \mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\Phi^2}$, und

und $\cos DTC = \frac{\sin\lambda\,\mathrm{tang}\,\phi}{\sqrt{(1+\sin\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\phi^2)}} = \frac{\mathrm{tang}\,\lambda\,\mathrm{tang}\,\phi}{\sqrt{(\sec\lambda^2+\mathrm{tang}\,\lambda^2\,\mathrm{tang}\,\phi^2)}}$. Man ſetze nun CD auf BT ſenkrecht, ſo iſt $DC = TC \sin DTC = -\frac{r\sec\lambda}{\mathrm{tang}\,\phi}$, und $DT = TC \cos DTC = -r\,\mathrm{tang}\,\lambda$, beydes wie im 21. §. voriger Abhandlung.

21. §.

Wenn die Ebene des Kegelſchnitts nicht allein auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche ſenkrecht iſt, ſo hat man $\psi = 0$, und $\phi = 90°$. Damit aber der Kegelſchnitt ein Kreis werde, muß $\mathrm{tang}\,\phi = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$ ſeyn, oder $\cot\phi = \frac{m^2 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. Demnach wird bey gegenwärtiger Vorausſetzung $\frac{m^2 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 0$, und $m^2 = \cos 2\alpha$, oder $\frac{rr}{bb} = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$, folglich $rr + bb\sin\alpha^2 = bb\cos\alpha^2$. Ueberdem giebt dieſe Vorausſetzung $\sin(\alpha+\phi) = \cos\alpha$, alſo den Halbmeſſer der Projection $= \frac{r\cos\alpha - fm}{\sin\alpha}$, und $Ec = \frac{f\cos\alpha - rm}{\sin\alpha}$. Geht überdem der Schnitt durch den Mittelpunkt der Grundfläche, ſo iſt $f = 0$, alſo der Halbmeſſer des Schnitts $= \frac{r\cos\alpha}{\sin\alpha} = r\cot\alpha$, und $Ec = -\frac{rm}{\sin\alpha} = -\frac{rr}{b\sin\alpha}$.

22. §.

Dieſer letzte Fall findet ſeine Anwendung bey der ſtereographiſchen Projection der Parallelkreiſe des Aequators auf einem Meridian als der Tafel, wenn das Auge im Pol dieſes Meridians ſtehet. Es ſey in der 9. Fig. zur vorigen Abhandlung wo DLd einen Parallelkreis vorſtellt, dieſes Parallelkreiſes Halbmeſſer $= r$, der Kugel Halbmeſſer $= \rho$. Wenn nun e ſein Mittelpunkt iſt, und man ziehet Oe als die Axe des optiſchen Kegels, ſo iſt der Neigungswinkel dieſer Axe gegen die Grundfläche $= eOT = \alpha$, und $Oe = b$. Ferner iſt $Te = b \sin\alpha$, $OT = \rho = b\cos\alpha$, und $\varrho\varrho = Te^2 + rr$, alſo $bb\cos\alpha^2 = bb\sin\alpha^2 + rr$, wie erfordert wird, damit die Projection ein Kreis werde. Ueberdem geht die Tafel durch den Mittelpunkt des Parallelkreiſes, alſo wird der Halbmeſſer der Projection $= r\cot\alpha = \frac{r\,OT}{Te}$. Wenn nun die Breite des Parallelkreiſes $= \psi$ iſt, ſo wird $Te = \varrho\sin\psi$, und $r = \rho\cos\psi$, alſo $\frac{r}{Te} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \cot\psi$, folglich iſt der Halbmeſſer der Projection $= \rho\cot\psi$. Weiter wird $Ec = -\frac{rr}{b\sin\alpha} = \frac{\varrho\varrho\cos\psi^2}{\varrho\sin\psi} = -\rho\cos\psi\cot\psi$. Da nun $Te = \rho\sin\psi$, ſo wird $Tc = \rho(\sin\psi + \cos\psi\cot\psi) = \rho \times \frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi} = \rho\operatorname{cosec}\psi$, welches mit dem 19. §. der vorigen Abhandlung übereinſtimmet.

23. §.

Bey der ſtereographiſchen Horizontal-Projectionen der Parallelkreiſe des Aequators läſt ſich die bisherige Theorie (6. Fig.) ſo anwenden. Man ziehe OM, OC, und ON, wenn MFNf der Pa-

Parallelkreis und C ſein Mittelpunkt iſt; ſo iſt OC die Axe des optiſchen Kegels, und der Parallelkreis die Grundfläche. Die Ebene des Meridians $OBZ\beta$ iſt die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche, und der Neigungswinkel ſelbſt iſt $OCN = a$. Auf der Ebene dieſes Neigungswinkels ſteht die Tafel $BF\beta f$ ſenkrecht, und ſie ſchneidet die Grundfläche des Kegels unter dem Winkel $TEM = \psi$. Weil nun TC auf MN ſenkrecht iſt, und auch $ETZ = 90°$, ſo iſt $CTZ = TEC = \psi$, und $OTC = 180° - \psi$, ſo wie $TCO = 90° - \alpha$, folglich $TOC = 180° - OTC - TCO = \alpha + \psi - 90°$. Man ſetze $CO = b$, und $CM = r$, ſo hat man $\sin OTC : b = \sin TCO : TO$, alſo $TO = \frac{b \sin TCO}{\sin OTC} = \frac{b \cos \alpha}{\sin \psi} = TM$. Ferner $\sin OTC : b = \sin TOC : TC$, alſo $TC = \frac{b \sin TOC}{\sin OTC} = \frac{b \cos(\alpha + \psi)}{\sin \psi}$. Aber $TM^2 = TC^2 + CM^2$ alſo $\frac{bb \cos \alpha^2}{\sin \psi^2} = \frac{bb \cos(\alpha + \psi)^2}{\sin \psi^2} + rr$. Hieraus folgt $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) + rr \sin \psi^2$, oder $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha^2 \mathrm{cas}\, \psi^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \psi \cos \psi + \sin \alpha^2 \sin \psi^2) + rr \sin \psi^2$. Wenn man nun $1 - \sin \psi^2$ ſtatt $\cos \psi^2$ ſchreibt, ſo erhält man ferner $2\, bb \sin \alpha \cos \alpha = rr + bb \sin \alpha^2 - bb \cos \alpha^2) \times \mathrm{tang}\, \psi$, folglich $\mathrm{tang}\, \psi = \frac{bb \sin 2\alpha}{rr - bb \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$. Demnach iſt vermöge des 14. §. der Schnitt ein Kreis.

24. §.

Der Halbmeſſer dieſes Kreiſes iſt vermöge des 15. §. $= \frac{r \sin \alpha + \phi - f m \sin \phi}{\sin \alpha} = \frac{r (b \sin \alpha + \phi - f \sin \phi)}{b \sin \alpha}$, und wenn man in der Linie ET den Abſtand $Ec = \frac{f \sin \alpha + \phi - r\, m \sin \phi}{\sin \alpha}$ $= \frac{b f \sin(\alpha + \phi) - rr \sin \phi}{b \sin \alpha}$ nimmt, ſo iſt c der Mittelpunkt der Projection. Es ſey der Kugel Halbmeſſer $= \rho$. ſo iſt $\rho = \frac{r}{\cos \psi}$. Ueberdem iſt der Winkel $OKT = 180^\circ - (\alpha + \phi)$, wenn nemlich K der Punkt iſt, worinn OC von der Tafel geſchnitten wird. Daher iſt im Dreyeck OKT die Seite $OK = \frac{\rho}{\sin(\alpha + \phi)}$, im Dreyeck ECK aber die Seite $KC = \frac{f \sin \phi}{\sin(\alpha + \phi)}$, folglich $OK + KC = b = \frac{\rho + f \sin \phi}{\sin(\alpha + \phi)}$, und $f \sin \phi = b \sin(\alpha + \phi) - \rho$. Dies ſtatt $f \sin \phi$ geſetzt giebt den Halbmeſſer der Projection $= \frac{\rho r}{b \sin \alpha}$. Nun war im 28. §. der vorigen Abhandlung die Breite des Orts $Z = \phi$, und des Parallelkreiſes Breite $= \psi$. Daher iſt der Bogen $ON = \psi + \phi$, und $ZM = \psi - \lambda$. Im Dreyeck OCN aber iſt die Seite $ON = 2 \rho \sin \frac{1}{2} (\psi + \lambda)$ der Winkel $ONM = \frac{1}{2} (180^\circ - (\psi - \lambda)) = 90^\circ - \frac{1}{2} (\psi - \lambda)$ und $OCN = \alpha$. Folglich hat man im Dreyeck OCN die Proportion $b : \cos \frac{1}{2} (\psi - \lambda) = 2 \phi \sin \frac{1}{2} (\psi + \lambda) : \sin \alpha$, und dieſe giebt $b \sin \alpha = b \sin \alpha = 2 \rho \cos \frac{1}{2} (\psi + \lambda) = \rho (\sin \psi + \sin \lambda)$. Daher wird der Halbmeſſer der Projection $= \frac{\rho}{\sin \psi + \sin \lambda} = \frac{\rho \cos \psi}{\sin \psi + \sin \lambda}$.

Ferner iſt $b f \sin(\alpha + \phi) = ff \sin \phi + f \rho$, alſo $Ec = \frac{(ff - rr) \sin \phi + f \rho}{b \sin \alpha}$. Man hat überdem $(CM + CE)(CM - CE) =$

(T β

$(T\beta + TE)\,(T\beta - TE)$, oder $rr - ff = \varrho\varrho - TE^2$. Dieß giebt $Ec = \frac{(TE^2 - \rho\rho)\sin\Phi + f\rho}{b \sin\alpha}$. Es iſt aber $TE = \frac{\rho \sin\psi}{\sin\Phi}$, alſo $(TE^2 - \varrho\varrho)\sin\Phi = \frac{\varrho^2 \sin\psi^2 - \rho^2 \sin\Phi^2}{\sin\Phi}$; ferner $\rho \sin\psi = CT = f \operatorname{tang}\Phi$, folglich $f = \rho \sin\psi \cot\Phi$ und $Ec = \frac{\rho^2 \sin\psi(\sin\psi + \cos\Phi)}{b \sin\alpha \sin\psi} - \frac{\Phi \sin\varrho^2}{b \sin\Phi}$. Iſt nun ÆQ die Durchſchnittslinie des Aequators mit dem Meridian, ſo iſt $QTZ + CTZ = 90^\circ = \lambda + \Phi$, alſo $\sin\Phi = \cos\lambda$, und $\cos\Phi = \sin\lambda$. Ueberdem war $b \sin\alpha = \rho(\sin\psi + \sin\lambda)$, alſo findet man $Ec = \frac{\varrho \sin\psi}{\sin\Phi} - \frac{\rho \cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda} = TE - \frac{\rho \cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und daraus folgt $TE - Ec = Tc = \frac{\rho \cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, welches wiederum alles mit dem 28. §. der vorigen Abhandlung übereinſtimmet.

W. J. G.

W. J. G. Karſtens

Abhandlung

von der

Archimedeiſchen

Waſſerſchraube.

Von der
Archimedeiſchen Waſſerſchraube.

1. §.

Herr Leonh. Euler hat im V. Theil der Comment. Nov. Petrop. eine Theorie der Waſſerſchraube vorgetragen, welche auf die nunmehro bekannten neuen Erweiterungen der Hydraulik gebauet iſt; er hat die Rechnungen darüber ſo weit getrieben, als es die Schwierigkeiten der Integrationen, die dabey vorkommen, zulaſſen: iſt aber genöthiget geweſen, die Unterſuchung abzubrechen, weil er kein Mittel fand, diejenige Differentialgleichung zu integriren, woraus die Geſchwindigkeit des Waſſers in der um die Spindel gewundenen Röhre gefunden werden müſte. Nach der Zeit hat die königliche Akademie der Wiſſenſchaften zu Berlin die Preisfrage aufgegeben, wie eine Waſſerſchraube am vortheilhafteſten anzuordnen ſey, und ſie hat im Jahr 1766. dem Herrn Hennert den Preis zuerkannt. Der Herr Hennert gründet in der Preisſchrift ſeine Rechnungen mit Herrn Euler auf einerley Differentialgleichung, und ſcheint zu glauben, daß er die erwehnte Geſchwindigkeit des Waſſers in der Waſſerſchraube der Theorie gemäß richtig gefunden habe. Herr Hennert müſte demnach eine wichtige bisher noch unbekannt geweſene Methode zu integriren erfunden haben, wenn er dieſes wirklich geleiſtet hätte: ſein Vortrag aber hat meine Erwartung gar nicht erfüllet, er ſcheint mir vielmehr ſehr wichtigen Erinnerungen ausgeſetzt zu ſeyn, und nach meiner Ueberzeugung iſt die Preisfrage in der Hauptſache unbeantwortet geblieben. Deswegen glaube ich, daß es nicht ohne Nutzen ſeyn werde, wenn ich in dieſem Aufſatz zeige, wieweit man in der Theorie von dieſer Maſchine eigentlich gekommen ſey; und wenn ich zugleich diejenigen Formuln entwickele, woran man ſich bey der Berechnung und Anordnung einer Waſſerſchraube mit ziemlicher Sicherheit ſo lange halten kann, bis man Mittel gefunden hat, die Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden.

2. §.

Es wird nicht nöthig ſeyn, daß ich mich umſtändlich mit einer Beſchreibung von der Geſtalt der Waſſerſchraube aufhalte. Das Weſentliche davon beſteht bekanntermaſſen darinn, daß eine hohle Röhre um einen Cylinder ſo geführt wird, daß ihre centriſche Linie die Geſtalt einer Schraubenlinie bekömmt. Uebrigens finde ich nicht undienlich zu erinnern, daß es nach Leupolds Urtheil im Theatro Machin. Hydraul. P. I. IV. Cap. 67. §. ſchwer ſey, eine bleyerne Röhre in der Geſtalt einer Schraubenlinie um die Spindel zu führen. Deswegen iſt es auch wohl gewöhnlich, daß man die Waſſerſchraube inwendig ohngefehr wie eine Wendeltreppe zurichtet, wovon man a. a. O. Zeichnungen findet, ſo wie auch Vorſchriften gegeben werden, wie alles aus hölzernen Stücken, die hier auch Schaufeln heiſſen, gehörig zuſammengeſetzt, und hiernächſt mit eiſernen Reifen verbunden werden kann. Ferner bemerke ich noch, daß um eine und eben dieſelbe Spindel zwey, auch wohl drey verſchiedene Röhren geführt werden können, worauf ſich die Eintheilung in einfache, doppelte und dreyfache Waſſerſchrauben gründet. Indeſſen iſt es nur nöthig, die einfache Schnecke zu betrachten, weil dasjenige, was von dem einem Schneckengang erwieſen wird, hiernächſt ohne Schwierigkeit auf die übrigen angewandt werden kann.

3. §.

Es ſey nun ABCD die Spindel (1. Fig.) in einer, wie gewöhnlich, gegen den Horizont geneigten Lage, und AETGHC ſey die centriſche Linie der um die Spindel geführten Röhre. Das Rechteck ABCD ſey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, und durch B ſey BK in dieſer Verticialfläche horizontal gezogen, ſo iſt CBK der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont, BA iſt der Durchmeſſer der untern Grundfläche, und der Punct A liegt unter allen Puncten im Umfang der untern Grundfläche am höchſten über eine durch B horizontal liegende Ebene. Die Figur iſt nun ſo gezeichnet, daß der unterſte Anfangspunct der Schraubenlinie ebenfalls in A fällt. Steht nun das Waſſer bis an *hi*, ſo kann bey dieſer Stellung der Spindel kein Waſſer in A hinein treten, dafern die Oefnung A höher als der Waſſerpaß *hi* liegt. Beym Umlauf der Spindel durchläuft die untere Oefnung A den Umfang des Kreiſes A*α*BPA, und bey jedem Umlauf wird dieſe untere Oefnung unter Waſſer ſeyn, ſo lange ſie in dem Bogen *α*BP*a* bleibt, wenn man annimmt, daß *aα* die Durchſchnittslinie der Waſſerfläche mit der Grundfläche der Spindel ſey, ſo wie *hi* die Durchſchnittslinie eben der Waſſerfläche mit der Verticalfläche ABKCD iſt. Weil die Waſſerfläche ſowohl, als auch die Ebene A*a*Bα beyde auf ABKCD ſenkrecht ſind, ſo iſt *a*α auf ABKCD ſenkrecht, folglich auch auf AB und *hi*., ſo daß die Bogen A*a* und Aα, imgleichen B*a* und Bα gleich groß ſind. Man ſtelle ſich nun die Verticale Ebene DABKC unbeweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe ſich einmal ſo um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch α, B, P bis wieder nach A laufe; ſo wird dieſe untere Oefnung unter Waſſer ſeyn, ſo lange ſie in dem Bogen αBP*a* bleibt, und es iſt aus den Geſetzen der Hydroſtatick ſchon begreiflich, daß durch die untere Oefnung, ſo lange ſie unter Waſſer bleibt, das Waſſer in die Schnecke hinein dringen werde. Nur muß man hiebey zum Grunde ſetzen, daß die Schnecke nicht zu ſchnell umlaufe, damit das Waſſer Zeit genug behalte, in die Röhre hinein zu treten. Wenn nun die Schnecke in die Lage gekommen iſt, welche die 2. Figur vorſtellt, wenn die untere Oefnung den Bogen A*b*B*a* durchlaufen hat, und bey *a* wieder über das Waſſer herauf ſteigt, der Bogen *a*M*f* aber ſich in eben dieſem Augenblick nah unter dem Waſſer befindet; ſo iſt derſelbe jetzt mit Waſſer angefüllt. Es muß demnach nun unterſucht werden, unter welchen Umſtänden diejenige Menge Waſſer, welche bis dahin in die Röhre hinein getreten iſt, beym fernern Umlauf darinn bleiben, und nach und nach höher ſteigen werde.

4. §.

Es iſt der Winkel gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Spindel ſchneidet, nebſt dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont, die untere Oefnung befindet ſich an ihrer höchſten Stelle bey A: man ſoll die Höhe eines gegebenen Puncts M der Schraubenlinie über eine durch B horizontal gelegte Ebene finden.

Aufl. Es ſey MP mit der Axe (1. Fig.) der Spindel parallel, und man ſetze den Bogen $AP = x$, den Winkel $MAP = \eta$, ſo iſt $PM = x \,\mathrm{tang}\, \eta$. Ferner ſey MR vertical und PT horizontal, ſo iſt MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont. Man ſetze dieſen Winkel $= \vartheta$, ſo iſt $MT = PM \sin\vartheta = x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta$: die durch B horizontal gelegte Ebene heiſſe Kürze halber die **Fundamental-Ebene**, und MT ſchneide dieſe Ebene in R. Wenn nun auch Pr auf eben dieſer Ebene ſenkrecht iſt, ſo hat man $Pr = TR$. Es ſey noch PN auf AB ſenkrecht, ſo iſt PN horizontal, und wenn NS auf die Fundamental-Ebene ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt auch $NS = Pr = TR$. Weil nun $NBS = 90^\circ - \vartheta$, ſo wird $NS = BN \cos\vartheta = TR$, und die geſuchte Höhe $MR = x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta + BN \cos\vartheta$. Der Halbmeſſer AO der Spindel ſey $= r$, ſo iſt $BN = 2r - AN$ und $AN = r \,\mathrm{sinv}\, \frac{x}{r}$, folglich die geſuchte Höhe $MR = x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta + r\,(2 - \mathrm{sinv}\, \frac{x}{r} \cos\vartheta$, oder auch $MR = x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta + r\,(1 + \cos\frac{x}{r}) \cos\vartheta$.

5. §.

Aus dieſer Gleichung flieſſen folgende Sätze. Wenn $x = 0$ iſt, ſo hat man $MR = 2r \cos\vartheta$, wie auch aus Betrachtung der Zeichnung unmittelbar erhellet. So lange als x ſehr klein iſt, wächſt MR, wenn x wächſt, denn $x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta$ wächſt mit x, und $r\,(1 + \cos\frac{x}{r}) \cos\vartheta$ nimmt zwar ab: allein nur ſehr wenig, weil $\cos\frac{x}{r}$ ſehr nahe $= 1$ iſt, ſo lange x ſehr klein bleibt. Wie lange MR wachſe, findet man vermittelſt der Differential-Rechnung, es wird nemlich $\vartheta MR = \vartheta x \,\mathrm{tang}\, \eta \sin\vartheta - \vartheta x \sin\frac{r}{x} \cos\vartheta$. So lange dies Differential poſitiv bleibt, ſo lange wächſt MR, und dies erfolgt, ſo lange $\sin\frac{x}{r} < \mathrm{tang}\, \eta \,\mathrm{targ}\, \vartheta$ bleibt. Wenn aber $\sin\frac{x}{r} = \mathrm{tang}\, \eta \,\mathrm{tang}\, \vartheta$ wird, ſo iſt MR am gröſten, und nimmt wieder ab,

$\mathit{ſin}\,\frac{x}{r} > \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ wird. Es ſey demnach $\mathit{ſin}\,\frac{AQ}{r} = \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$, und QL mit der Spindelaxe parallel, ſo liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte.

Wenn $x = \frac{1}{2}\pi r$ wird, ſo iſt $\mathit{ſin}\,\frac{x}{r} = 1$, und gröſſer kann dieſer Sinus nicht werden. Für gröſſere Werthe von x nimmt $\mathit{ſin}\,\frac{x}{r}$ wieder ab, ſo daß aufs neue $\mathit{ſin}\,\frac{x}{r} = \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ wird, wenn $x = \pi r - AQ$ iſt. Für gröſſere Werthe von x muß alſo $\mathit{ſin}\,\frac{x}{r} < \operatorname{tang}\eta \operatorname{tang}\vartheta$ werden, und MR wieder wachſen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genommen, und PM mit der Spindel-Axe parallel gezogen wird, ſo liegt M niedriger, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Für $x = AQ$ hat die Höhe Lp einen gröſten, für $x = AP = \pi v - AQ$ aber hat MR einen kleinſten Werth: und wenn eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie in l ſchneidet, ſo iſt LMl derjenige Bogen, der ſich auf einmal mit Waſſer füllen kann, (arcus hydrophorus). Man ſtelle ſich vor, das Waſſer, worinn die Spindel ſteht, ſteige höher hinauf, als L liegt, ſo wird durch A Waſſer in die Schnecke hinein treten, und es wird ſich nicht allein der ganze Bogen $ALMl$ mit Waſſer füllen, ſondern es wird auch noch über l hinaus in die Röhre hinein treten, ſo weit bis es in der Röhre eben ſo hoch, als drauſſen ſteht. Wenn hiernächſt das äuſſere Waſſer wieder bis unter L ſinkt, ſo wird etwas durch A heraus laufen, aber der ganze Bogen LMl wird mit Waſſer angefüllt bleiben.

6. §.

Dafern die Schnecke das Waſſer zu heben dienen ſoll; ſo muß der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Ho-

rizont gröſſer ſeyn, als der Winkel der Schrauben-Linie mit dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Es ſey der Winkel $ABS < \eta$, alſo $90^\circ - \vartheta < \eta$, ſo iſt $\cot\vartheta < \tan g\,\eta$, folglich $\tan g\,\eta\,\tan g\,\vartheta > 1$. Wenn aber die Höhe $L\varrho$ einen gröſten, und MR einen kleinſten Werth haben ſoll; ſo muß $\sin\frac{QA}{r} = \sin\frac{AP}{r} = targ\,\eta\,\tan g\,\vartheta$ ſeyn. Dies würde alſo bey der angenommenen Vorausſetzung $\sin\frac{AQ}{r}$, oder $\frac{\sin AP}{r} > 1$ geben, welches nicht möglich iſt. Wäre $ABS = \eta$, alſo $\cot\vartheta = \tan g\,\eta$, ſo hätte man $\tan g\,\eta\,\tan g\,\vartheta = 1, = \sin\frac{AQ}{r} = \frac{\sin AP}{r}$, folglich müſte $\frac{AQ}{r} = \frac{AP}{r} = \frac{1}{2}\pi$ ſeyn, und die Puncte L und M würden wie P und Q in einen zuſammen fallen, ſo daß der Waſſerhaltende Bogen LMl verſchwände. In der Schnecke kann demnach nur alsdenn nach hydroſtaliſchen Geſetzen Waſſer ſtehen bleiben, wenn $ABS > \eta$ iſt.

Es muß demnach auch $90^\circ - \eta > 90^\circ - ABS$ ſeyn, alſo $90^\circ - \eta > \vartheta$, da dann $90^\circ - \eta$ der Winkel iſt, welchen die Schraubenlinie mit den Ordinaten PM einſchließt. Dieſer muß alſo gröſſer ſeyn, als die Neigung der Spindel gegen den Horizont.

Wenn man $\tan g\,\eta\,\tan g\,\vartheta = T$ ſetzt, ſo erhält man $AQ = r\,A\sin T$, und $AP = r\,(\pi - A\sin T)$ (5. §.) da dann dieſe Gleichungen dienen, die Puncte P und Q, alſo auch L und M zu finden.

7. §.

Man ſtelle ſich nun (2. Fig.) die Schnecke in jeder andern willkührlichen Lage vor, ohne daß die untere Oeſnung ſich an ihrer höchſten Stelle bey A befindet, etwa wie in der 2. Fig. wo ſich die untere Oefnung bey a in dem Halbkreiſe $AaPB$ befindet. Man erweitere in Gedanken die cylindriſche Fläche der Spindel unterhalb der Grundfläche AB, und ſtelle ſich zugleich vor, die Schraubenlinie werde ebenfalls unterhalb a verlängert bis ſie mit AD in A' zuſammenſtößt. Man lege durch A' eine Ebene mit der Grundfläche der Spindel parallel, ſo giebt ihr Schnitt mit der Cylinderfläche einen der Grundfläche gleichen Kreis $A'Q'P'B'$. Nimmt man nun $A'Q' = r\,A \sin T$, $A'P' = r\,(\pi - A \sin T)$ und zieht alsdenn $Q'L$ und $P'M$ mit der Cylinder-Axe parallel, ſo iſt wie im 5. §. L der höchſte und M der niedrigſte Punct des waſſerhaltenden Bogens: es ſind aber dieſe Puncte mit denjenigen nicht einerley, welche im 5. §. beſtimmet wurden, auch iſt ihre Höhe über der Fundamentalebene von der dortigen unterſchieden. Um ihre Höhe für den gegenwärtigen Fall zu finden, erwäge man folgendes. Wenn man ſich durch B' eine Horizontalfläche vorſtellt, ſo iſt die Höhe des Puncts L über dieſe Ebene $= A'Q' \,\mathrm{tang}\,\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'Q'}{r}\right)\cos\vartheta$, und die Höhe des Puncts M über dieſelbe $= A'P' \,\mathrm{tang}\,\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'P'}{r}\right)\cos\vartheta$. Die Horizontalfläche durch B' liegt aber um das Stück $B'B \sin\vartheta$ niedriger, als die vorige durch B, und es iſt $B'B = A'A = Aa.\,\mathrm{tang}\,\eta$. Wenn alſo der Winkel $AOa = \phi$ folglich $Aa = r.\phi$ geſetzt wird; ſo erhellet, daß man von jeder der angegebenen Höhen das Stück $r\phi \,\mathrm{tang}\,\eta \sin\vartheta$ abziehen müſſe, um ſie in die Höhen über die Horizontalfläche durch B zu verwandeln. Demnach wird die Höhe des Puncts $M = (A'P' - r\phi)\,\mathrm{tang}\,\eta \sin\vartheta + r\left(1 + \cos'\frac{A'P'}{r}\right)\cos\vartheta$.

Wäre *a* in dem andern Halbkreiſe A*b*B befindlich, ſo würde der Bogen M*a* die Linie AD oberhalb A ſchneiden. Wenn man ſich alſo den Durchſchnittspunct A′ oberhalb A vorſtellt, ſo ſieht man wohl, daß die Höhe des Puncts $M = (A'P' + r\phi)\ \mathit{tang}\ \eta \sin \vartheta + r(1 + \cos \frac{A'P'}{r}\ \cos \vartheta$ werden müſſe. Daſſelbe ergiebt ſich auch daraus, weil alsdenn der Winkel ϕ in der vorigen Gleichung das entgegen geſetzte Zeichen haben muß.

8. §.

Dieſe Schlüſſe machen (2. Fig.) die Art und Weiſe begreiflich, wie das Waſſer bloß wegen ſeines Gewichts in der Waſſerſchraube ſteigen kann. Man ſtelle ſich nemlich vor, die niedrigſte Oefnung ſtehe anfangs in A, da noch alles ledig iſt, und die Schnecke werde nun ſo gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch *b*, B, P, Q laufe. Erreicht ſie nun beym Herabſteigen bey *a*′ das Waſſer, ſo tritt daſſelbe nach den Geſetzen der Hydroſtatick in die Röhre ſo hoch hinein als es drauſſen ſteht, vorausgeſetzt, daß die Maſchine nicht zu ſchnell umlaufe. In dem Augenblick nun, da A in P ankommt, iſt zwar derjenige Bogen mit Waſſer gefüllt, der ſich von P aus bis wieder an die Waſſerfläche auf der andern Seite erſtreckt: allein wenn in dieſem Augenblick der Umlauf gehemmet wurde, und das Waſſer alsdenn tiefer herab ſänke, als P liegt, ſo würde auch alles in die Schnecke ſchon hineingetretene Waſſer wieder herauslaufen, weil P niedriger liegt, als die übrigen Puncte des mit Waſſer angefüllten Bogens. Wäre aber die untere Oefnung ſchon über P hinaus bis nach *a*′ vorgerückt, ſo würde unter eben den Umſtänden nicht mehr alles Waſſer auslaufen, weil die zwiſchen *m* und *a*′ befindlichen Puncte höher als *m* liegen. Geſetzt alſo, daß auch das Waſſer nur bis an die

Horizontallinie $a'\alpha'$ ſtünde, und die untere Oefnung bey a' ſchon über dem Waſſerpaß $a'\alpha'$ hervorſteige, ſo würde doch der Bogen $a'mb'$ ſein Waſſer halten, wenn auch b' in dem Waſſerpaß $a'\alpha'$ liegt. Steigt nun beym fernern Umlauf der Schnecke die untere Oefnung weiter hinauf von a' bis a, ſo kann die hinein getretene Maſſe Waſſer nicht in demſelben Bogen $a'mb'$ bleiben: Denn es iſt nun m nach m' geruckt, und M liegt nun niedriger, als m'. Alſo muß das Waſſertheilchen was vorhin in m war, jetzt nach M gerückt ſeyn, und man ſieht leicht, daß alle übrige Waſſertheilchen, um eben ſoviel gehoben ſind, als M höher wie m liegt. Zur Erleichterung der Sache kann man ſich die ganze hineingetretene Maſſe im Punct m vorſtellen, ſo erhellet, daß dieſe Maſſe in der geraden Linie PM immer weiter hinauf rücken müſſe, wenn die Schnecke umzulaufen fortfährt.

9. §.

Wenn die Sehne QV auf AB ſenkrecht ſteht, (1. Fig.) ſo iſt ſie horizontal, und die bisherige Ausführung ergiebt, daß die Grundfläche der Waſſerſchraube bis an dieſe Sehne unter Waſſer ſtehen müſſe, wenn die Schnecke bey jedem Umlauf die möglichſt gröſte Menge Waſſer ſchöpfen ſoll. Steht das Waſſer niedriger, ſo ſchöpft die Schnecke nicht ſoviel: ja ſie würde gar nichts ſchöpfen, wenn das Waſſer noch unter der Horizontallinie PN ſtünde. Es iſt aber $AQ = r\,A\,\mathit{ſin}\,T = AV$, und dadurch werden die Puncte V und Q beſtimmt. Eine gröſſere Tiefe unter dem Waſſer iſt, ſoviel ſich aus dem bisherigen Vortrag beurtheilen läſt, unnöthig. Wenn ſich nun die Länge des waſſerhaltenden Bogens zur Länge eines Schraubenganges wie $v : \mu$ verhält, und es iſt die Menge Waſſer, die der ganze Schraubengang faſſen würde, $= Q$, ſo ſchöpft die Schnecke bey jedem Umlauf die Menge Waſſer $\frac{v}{\mu}$ Q. Dieſe Menge tritt beym zweyten Umlauf der Schnecke aus dem untern Schraubengang in den nächſthöhern, beym dritten Umlauf aus dem zweyten Schraubengang in den dritten u. ſ. f. bis es endlich nach ſoviel Umläufen, als Schraubengänge vorhanden ſind, aus dem oberſten Schraubengange ausläuft. Das Waſſer nemlich, was nach dem erſten Umlauf in $\mathrm{LM}l$ ſtand, wird nach dem zweyten Umlauf in $\mathrm{L'M'}l'$ ſtehen, u. ſ. f.

10. §.

Es ſey nun die Schnecke (1. Fig.)in einer gewiſſen willkührlichen Lage befeſtiget, und man nehme an, daß in einem Schraubengange der waſſerhaltende Bogen mit Waſſer angefüllet ſey: ſo wird das Gewicht dieſes Waſſers die Schraube zu drehen ſtreben. Wäre das Gewicht dieſer ganzen Maſſe in dem Punct M beyſammen, ſo würde man das Moment, womit daſſelbe die Schraube und ihre Axe Oo zu drehen ſtrebte, ſo finden. Dieß Gewicht ſey $= p$, ſo iſt die Richtung MT deſſelben vertical. Man zerlege es nach den Richtungen MP und MX, ſo daß MX in der Ebene PMT auf MP ſenkrecht ſteht, ſo wird der Druck nach $\mathrm{MX} = p \sin \mathrm{MTX} = p \sin \mathrm{TMP} = p \cos\vartheta$. Es ſey MY mit PO parallel, ſo iſt die Ebene XMY auf PM, folglich auch auf Oo ſenkrecht, und das Moment des Drucks nach $\mathrm{MX} = g \cos\vartheta \; r \sin.\ \mathrm{XMY}$. Nun ſey Zz die Durchſchnittslinie der Ebene XMQ mit ABCD, ſo iſt der Winkel $\mathrm{MYZ} = \mathrm{POB}$. Ferner iſt die Ebene MPT mit ABCD, alſo MX mit YZ parallel, folglich der Winkel $\mathrm{XMY} = 180° - \mathrm{BOP} = \mathrm{AOP}$, und das Moment des Drucks $\mathrm{MX} = p \cos\vartheta \; r \sin \mathrm{AOP}$. Da nun $\mathrm{AOP} = \frac{\mathrm{AP}}{r}$, ſo iſt $\sin \mathrm{AOP} = \sin \frac{\mathrm{AP}}{r} = \mathrm{tang}\, \eta \; \mathrm{tang}\, \vartheta$ (6. §.) alſo wird das Moment des Drucks nach $\mathrm{MX} = pr \sin\vartheta \, \mathrm{tang}\, \eta$.

11. §.

11. §.

Das Moment zu finden, womit das Waſſer, ſo wie es durch den ganzen Bogen *LMl* ausgebreitet iſt, die Schnecke um ihre Axe zu drehen ſtrebt.

Aufl. Es ſey M ein unbeſtimmter Punct des waſſerhaltenden Bogens, das Stück AM der centriſchen Linie $= s$, der Bogen AL $= \varepsilon$, und die Länge des waſſerhaltenden Bogens LM$l = \lambda$; ſo ſind die Kreisbogen AP $= s \cos\eta$, AQ $= \varepsilon \cos\eta$, AQPB$q = (\varepsilon + \lambda) \cos\eta$, folglich APB$q = \lambda \cos\eta$. Wenn nun LQ und lq mit der Axe der Spindel parallel, Qv und $q\mu$ aber auf AB ſenkrecht ſind, ſo iſt A$v = r \sin v \frac{AQ}{r}$, und A$\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen Maſſe Waſſer $= p$ geſetzt wird, ſo iſt das Gewicht des in M befindlichen Elements $= \frac{pds}{\lambda}$. Das Moment, womit dies Element die Schraube zu drehen ſtrebt, iſt $= \frac{pds}{\lambda} \cos\vartheta \cdot r \sin AOP$ (10. §.) $= \frac{pds}{\lambda} NP \cos\vartheta$. Nun iſt AP $= r\,A \sin v \frac{AN}{r} = r\,A \sin v \frac{x}{r}$, wenn man AN $= x$ ſetzt, folglich $d.$ AP $= \frac{rdx}{\sqrt{(2r,x - xx)}} = \frac{rdx}{NP}$, und es war AP $= s \cos\eta$, alſo wird $ds = \frac{rdx}{NP \cos\eta}$. Dies ſtatt ds geſetzt giebt das Moment, womit das in M befindliche Element die Schraube zu drehen ſtrebt, $= \frac{r\,p\,dx \cos\vartheta}{\lambda \cos\eta}$. Wird nun die Summe der Momente aller Waſſertheilchen von L bis M $= \mu$ geſetzt, ſo hat man vermittelſt der Integration $\mu = \frac{rpx\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} + C$. Es iſt aber $\mu = 0$, wenn $x = Av = r\sin v\frac{AQ}{r}$ iſt, alſo wird $\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta}$ $(x - r\sin v\frac{AQ}{r})$; und um daſſelbe für den ganzen waſſerhaltenden Bogen zu haben, muß man $x = A\mu = r\sin v\frac{APBq}{r}$ ſetzen, woraus der Ausdruck

$$\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} r \left(\sin v\frac{APBq}{r} - \sin v\frac{AQ}{r}\right)$$

folgt, oder auch

$$\mu = \frac{rp\cos\vartheta}{\lambda\cos\eta} r \left(\cos\frac{AQ}{r} - \cos\frac{APBq}{r}\right).$$

Dieſer Ausdruck läſt ſich noch auf folgende Art verkürzen. Weil L und l die äuſſerſten Puncten des waſſerhaltenden Bogens ſind, ſo liegen ſie gleich hoch über dem Horizont. Aus dem 4. §. aber ergiebt ſich die Höhe des Puncts L über die durch B horizontal gelegte Ebene, wenn man AQ ſtatt des dortigen α ſetzt, und die Höhe des Puncts l über eben die Ebene, wenn man APBq ſtatt x ſetzt. Sucht man auf dieſe Art beyde Höhen, und ſetzt ſie einander gleich, ſo kommt man auf die Gleichung

$$AQ\tan\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{AQ}{r}\right)\cos\vartheta =$$

$$APBq\tan\eta\sin\vartheta + r\left(1 + \cos\frac{APBq}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Daraus folgt

$AQ\tan\eta\tan\vartheta + r\cos\frac{AQ}{r} = APBq\tan\eta\tan\vartheta + r\cos$ $\frac{APBq}{r}$, folglich $r\left(\cos\frac{AQ}{r} - \cos\frac{APBq}{r}\right) = (APBq - VQ)$ $\tan\eta$

$\tan\eta \tan\vartheta = \lambda \cos\eta \tan\eta \tan\vartheta$ (weil $APBq - AQ = QPBq = \lambda \cos\eta = \lambda \sin\eta \tan\vartheta$. Dieß in den gefundenen Werth von μ geſetzt giebt $\mu = \frac{r p \cos\vartheta}{\lambda \cos\eta} \times \lambda \sin\eta \tan\vartheta = r p \tan\eta \sin\vartheta$.

Wenn das ganze Gewicht p indem Punct M beyſammen wäre, ſo würde das Moment deſſelben eben ſo groß ſeyn. (10. §.) Deswegen wird dieß Moment leicht gefunden, wenn man p berechnen kann, und dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß man die Länge des waſſerhaltenden Bogens λ finden könne. Wenn nemlich jeder Querſchnitt der um die Spindel gewundenen Röhre $= k^2$ iſt, ſo hat man $p = \gamma k^2 \lambda$, wo λ das Gewicht eines Cubic-Fuſſes Waſſer bedeutet.

12. §.

Die Länge des waſſerhaltenden Bogens *LMl* zu finden.

Aufl. Es ſey der Kreisbogen $AQ = \alpha$ der dem höchſten Punct L zugehört, ſo hat man $\alpha = r\, A \sin T$, und $T = \tan\eta \tan\vartheta$. (6. §.) Ferner ſey $APBq = \beta$, ſo erhält man aus dem vorigen §. die Gleichung $\cos\frac{\alpha}{r} - \cos\frac{\beta}{r} = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}\right) \tan\eta \tan\vartheta$. Man ſetze $\cos\frac{\beta}{r} = z$, ſo hat man $\frac{\beta}{r} = A \cos z$ ſowie $\frac{\alpha}{r} = A \sin T$, und $\cos\frac{\alpha}{r} = \sqrt{(1 - TT)}$. Dies giebt

$$\sqrt{(1 - TT)} - z = (A \cos z - A \sin T)\, T,$$

oder $z + T.\, A \cos z = \sqrt{(1 - TT)} + T.\, A \sin T$. Wenn aus dieſer Gleichung z gefunden iſt, ſo hat man zugleich $A \cos z = \frac{\beta}{r}$, alſo auch $\frac{\beta-\alpha}{r}$ und $\beta-\alpha$. Es iſt aber $\beta-\alpha = QPBq = \lambda \cos\eta$, und daraus erhält man $\lambda = \frac{\mu-\alpha}{\cos\eta} = (\beta-\alpha)\sec\eta$. Die Länge eines ganzen Schraubenganges iſt $= 2\pi\nu\sec\eta$; wird alſo dieſe $= l$ geſetzt, ſo hat man $\lambda = \frac{\beta-\alpha}{2\pi\nu} l$.

Aus dem 6. §. weis man, daß $\tan\eta \tan\vartheta$ nicht gröſſer, als 1. ſeyn könne. Der Werth $\tan\eta \tan\vartheta = 1$ giebt $\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\pi$. Wird $\tan\eta \tan\vartheta < 1$ angenommen, alſo $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, ſo muß $\frac{\beta}{r} < \frac{1}{2}\pi$ werden. Denn es iſt $AP = r\left(\pi - \frac{\alpha}{r}\right)$, wird alſo $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, ſo wird $\frac{AP}{r} > \frac{1}{2}\pi$. Aber es iſt allemal $APBq > AP$, alſo $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r}$, folglich auch $\frac{\beta}{r} > \frac{1}{2}\pi$, daß demnach $\cos\frac{\beta}{r}$ das entgegen geſetzte Zeichen bekommt. Je kleiner $\tan\eta \tan\vartheta$, alſo auch $\frac{\alpha}{r}$ wird, deſto gröſſer muß $\frac{\beta}{r}$ werden. Wird $\tan\eta \tan\vartheta = 0$, alſo $\frac{\alpha}{r} = 0$, ſo wird $1 - \cos\frac{\beta}{r} = 0$, und $\cos\frac{\beta}{r} = 1$, folglich $\frac{\beta}{r} = 2\pi$.

13. §.

Weil die völlige Auflöſung der Aufgabe des vorigen §. darauf beruhet, daß man den Werth von x aus der Gleichung

$z + T.\, A\cos z = \sqrt{(1+TT)} + T.\, A\sin T$ finden könne, ſo müßte man $A\cos z$ durch z ausdrücken, und ſodann z auf eine Seite des Gleichheits-Zeichens bringen. Allein es iſt bekannt, daß ſich $A\cos z$ nicht anders, als vermittelſt einer unendlichen Reihe durch z ausdrücken laſſe: deswegen bedient man ſich hier einer oder der andern bekannten Näherungs-Methoden. Man nimmt den Werth von z muthmaßlich an, und ſucht ihn nach und nach dem wahren Werth von z ſo nahe zu bringen, als der jedesmal erforderlichen Schärfe gemäß iſt. Wenn man die Gleichung ſo ausdrückt $z + T.\, A\cos z - \sqrt{(1-TT)} - T.\, A\sin T = o$, und den Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen $= Y$ ſetzt, ſo wird Y eine Function von z; und man weis, wenn der Werth $z = f$ den Werth $Y = F$ giebt, und beynahe $F = o$ iſt; daß alsdenn ſchon beynahe $z = f$ ſey, und noch näher $z = f - \frac{F dz}{dy}$, alſo hier $z = f - \frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)} - T}$ gefunden werde. Dieſer Methode zu ſchlieſſen haben ſich ſchon andere Schriftſteller bedienet, die ich unten nahmhaft machen werde.

14. §.

Wenn b der Abſtand der Schraubengänge iſt; ſo hat man $\mathrm{targ}\,\eta = \frac{b}{2\pi r}$. Demnach wird im 11. §. $\mu = rp \tan \eta \sin \vartheta = \frac{b}{2\pi} p \sin \vartheta$, und dies wäre das Moment der Kraft, welches erfordert wird, die Schraube im Gleichgewicht zu erhalten, wenn nur ein waſſerhaltender Bogen angefüllet iſt. Wenn demnach die Anzahl der Schraubengänge $= n$ iſt, ſo wird dies Moment $= \frac{nb}{2\pi} p \sin \vartheta$, wenn alle Bogen gefüllt ſind. Wird nun in einer

Ebene, die auf der Axe Oo ſenkrecht iſt, in der Entfernung f von der Axe eine Kraft P angebracht, ſo iſt ihr Moment $= Pf$; und wenn dieſe Kraft mit der geſammten Maſſe Waſſer, womit die Schraube beſchwert iſt, im Gleichgewicht ſeyn ſoll, ſo erhält man $P = \frac{b \sin\vartheta}{2\pi f}\, n\, p$, da dann $n\, p$ das Gewicht der ganzen in der Schraube befindlichen Maſſe Waſſer iſt. Wenn dieſe $= Q$ geſetzt und die Kraft P durch eine Menge Waſſer ausgedrückt wird, deren Gewicht dieſer Kraft gleich iſt; ſo hat man $P = \frac{b \sin\vartheta}{2\pi f} Q$. Indem aber die Schnecke einmal herum geht, durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Laſt Q wird um die Höhe $b \sin\vartheta$ gehoben.

Iſt M der niedrigſte Punct des waſſerhaltenden Bogens, ſo iſt ſeine Höhe über eine durch B horizontal gelegte Ebene $=$ $(AP + r\phi)\ \mathrm{tang}\,\eta \sin\vartheta + r\,(1 + \cos\frac{AQ}{r})\cos\vartheta$, wenn ϕ den Winkel AOa bedeutet, um welchen ſich die Spindel gegen $AqBP$ zu gedrehet hat. (7. §.) Der veränderliche Theil $r\phi \sin\eta\, \mathrm{tang}\,\vartheta$ dieſes Ausdrucks iſt dem Winkel ϕ proportional. Wenn alſo die Spindel gleichförmig umläuft, ſo ſteigt auch die Laſt mit gleichförmiger Bewegung, und weil das Moment der Laſt gar nicht von dem Winkel ϕ abhängt, ſo iſt daſſelbe von gleicher Gröſſe, was auch die Spindel durch die Umdrehung um ihre Axe für eine Lage bekommt.

15. §.

Die Waſſerſchraube wird durch eine Maſchine umgetrieben, und an derſelben iſt eine veränderliche Kraft angebracht, die von der Geſchwindigkeit der Maſchine ab-

hängt: man ſucht die Menge Waſſer, welche dieſe Maſchine bey der vortheilhafteſten Anordnung auf eine gegebene Höhe = a in gegebener Zeit T haben kann.

Aufl. Man muß diejenige Geſchwindigkeit des angegriffenen Theils der Maſchine kennen, wobey das mechaniſche Moment der Kraft am größten wird. Dieſe Geſchwindigkeit ſey = α, und die davon abhängende Kraft = F. Die Umlaufszeit der Spindel ſey = t, ſo ſteigt das Waſſer binnen der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geſchwindigkeit deſſelben nach der verticalen Richtung iſt = $\frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechaniſche Moment der Laſt = $\frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsſtand der Maſchine hat man alſo $F\alpha = \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge iſt, ſo hebt die Maſchine in der Zeit t die Menge Waſſer $\frac{1}{n} Q$ auf die Höhe $n b \sin \vartheta = a$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{T . Q}{n . t}$. Wenn man dieſe Waſſermenge = M ſetzt, und den Werth $\frac{Q}{t} = \frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$ ſubſtituirt, ſo findet man $M = \frac{F\alpha T}{n b \sin \vartheta} = \frac{F\alpha T}{a}$.

16. §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maſchine, welche die Waſſerſchraube umtreiben ſoll, anzugeben.

Aufl. Man hat einmal die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächſt iſt die in der Zeit t gehobene Menge Waſſer $= \frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$; und weil eben dies diejenige Menge iſt, die einen waſſerhaltenden Bogen füllet; ſo muß $k^2 \lambda = \frac{Mt}{T}$ ſeyn, wenn λ die Länge des waſſerhaltenden Bogens, und k^2 den flächen Innhalt ſeiner Querſchnitte bedeutet. Aus dieſer Gleichung hat man $t = \frac{K^2 \lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades ſey $= \vartheta$, und der Halbmeſſer deſſelben $= \varrho$, ſo iſt $\vartheta = \frac{2\pi\varrho}{\alpha}$, da dann das Verhältniß $\frac{\vartheta}{t}$ die Einrichtung der Maſchine beſtimmt.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben ſeyn, auf welche die Maſchine das Waſſer bringen ſoll, und daraus ergiebt ſich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechaniſche Moment der Kraft, $F\alpha$ bekannt iſt. Die Wahl der Kraft, welche die Maſchine treiben ſoll, wird von der Beſchaffenheit des Orts, wo die Maſchine angelegt werden ſoll, und andern eintretenden Umſtänden abhängen. Uebrigens ſind nun in der Gleichung $t = \frac{k^2 \lambda T}{M}$ drey Gröſſen t, k^2 und λ vorhanden, wovon man zwey willkührlich beſtimmen kann: jedoch iſt man dabey an folgende Einſchränkungen gebunden. Man beſtimmt λ, wenn man die Winkel η, ϑ, und den Halbmeſſer r der Spindel beſtimmt, von der Axe der Spindel bis an die centriſche Linie der um die Spindel geführten Röhre genommen. Es ſey nun die Länge der Spindel $Oo = b$, ſo iſt $\sin\vartheta = \frac{a}{b}$. Je kleiner demnach b genommen wird, deſto gröſſer wird $\sin\vartheta$. Man ſieht leicht, daß es vortheilhaft ſey, b ſo klein zu nehmen, als die Umſtände zulaſſen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Köſten erſpart, ſondern auch das Gewicht der Schnecke, folglich zugleich die Friction an ihren Zapfen vermindert wird. Aber man darf auch b nicht zu klein nehmen, damit $\sin\vartheta$ nicht zu groß werde, und dies aus zweyen Urſachen. Einmal muß $\tan\vartheta \tan\eta < 1$ ſeyn, damit die Schnecke wirklich Waſſer ſchöpfen könne, und fürs zweyte wird der waſſerhaltende Bogen deſto gröſſer, je kleiner $\tan\vartheta \tan\eta$ bleibt. Wenn alſo ϑ dieſen Einſchränkungen gemäß angenommen iſt, ſo muß $\eta < 90° - \vartheta$ ſeyn, da dann beyde Winkel η und ϑ zuſammen die Bogen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ beſtimmen, (12. §.) wofür ich ε und ζ ſchreiben will, da dann $\lambda = (\zeta - \varepsilon)\, r \sec\eta$ wird, und r noch unbeſtimmt bleibt.

Man brauche nun dieſen Werth ſtatt λ in der Gleichung $k^2\lambda T = M.t$, ſo hat man $k^2(\zeta - \varepsilon)\, T\, r \sec\eta = M t$, und es können nun zwey von den dreyen Gröſſen k^2, r, und t willkührlich genommen werden. Weil es aber nicht rathſam iſt, daß die Schnecke ſehr ſchnell umlaufe, weil ſonſt der unterſte Schraubengang ſich nicht gehörig füllen würde, ſo iſt es am beſten, die Einrichtung ſo zu machen, daß t nicht unter 4. Secunden ausfalle. Man kann alſo in Rückſicht auf dieſen Umſtand t willkührlich annehmen, und man erhält $k^2 r = \frac{M t}{(\zeta - \varepsilon)\, T \sec\eta}$, da dann k^2 oder r willkührlich angenommen werden kann. Hiebey bleibt alsdenn noch zu erwegen, daß k^2 nicht zu klein ausfallen müſſe, damit das Waſſer

ſer einen völlig freyen Durchgang behalte, und ſich keine Unreinigkeiten in der Röhre anſetzen.

17. §.

So wie ich bisher die Theorie von der Waſſerſchraube vorgetragen habe, eben ſo iſt ſie von den meiſten mir bekannten Schriftſtellern betrachtet worden. Es gehört dahin ein Aufſatz des Herrn Pitot in den Memoires de l' Academie de Paris A. 1736. p. 238. ed. Bat. und des Herrn Daniel Bernoulli Commentationes ſpeciales de cochlea Archimedis in der Hydrodynamica Sect. IX. p. 183. ſqq. Der Verfaſſer der Diſſertation ſur ces queſtions: comment l' eau ſ' éléve t — elle dans la vis d' Archimede, & quels ſeroient les moyens de porter cette machine a ſa perfection, welcher die berliniſche Academie der Wiſſenſchaften nächſt der Hennertſchen Preisſchrift das acceſſit zuerkannt hat, bleibt bey demſelben Vortrag dieſer Theorie. Ich habe in den beyden letzten §§. eben dieſe Theorie mit der Ausübung in Verbindung zu bringen geſucht, und ich glaube, daß man ſich in der Ausübung an die hieſelbſt gegebenen Vorſchriften noch immer am ſicherſten halten könne. Von demjenigen, was die oben ſchon erwehnten Aufſätze der Herrn Euler und Hennert enthalten, werde ich bald mehr Nachricht ertheilen, und damit ich das neueſte hieher gehörige Werk: Theoria cochleæ Archimedis ab obſervationibus, experimentis & analyticis rationibus ducta, auctore Jacobo Bellogrado Soc. Jeſu. Parmæ 1767. nicht ganz mit Stillſchweigen übergehe, ſo muß ich ſagen, daß ich es nur aus Recenſionen kenne, und das Buch ſelbſt bisher noch nicht habe erhalten können.

18. §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel ſoviel Waſſer in die Schnecke hinein, als der waſſerhaltende Bogen faſſen kann, vorausgeſetzt, daß die Schnecke grade ſo tief unter Waſſer ſtehe, als die im 9. §. vorgetragene Rechnung erfordert. Dieſen Umſtand, vermöge deſſen die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Waſſer ſtehen muß, ſchreibt Bernoulli ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfaſſer des Aufſatzes, welchem die Academie zu Berlin das acceſſit zuerkannt hat. Andere Schriftſteller, dahin Pſitet gehört, ſchreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Waſſer ſtehen müſſe, ſie berechnen aber doch die Würkung ſo, daß ſie keinen ununterbrochenen Guß des Waſſers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, ſondern nur bey jedem Umlauf ſoviel, als der waſſerhaltende Bogen faſſet. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: ob denn die Waſſerſchraube ihre Dienſte nicht leiſte, wenn ihre Grundfläche ganz unter Waſſer ſtehet, und ob nicht vielmehr alsdenn das Waſſer ununterbrochen durch die Röhre flieſſen, folglich dieſe Einrichtung noch vortheilhafter als die vorige ſeyn werde? Auf die Beantwortung dieſer Frage zielen Herrn Eulers Unterſuchungen ab in der Abhandlung: De cochlea Archimedis in den Comment. Nov. Petrop. T. V. pag. 259. ſqq. Dieſelbe Theorie legt Herr Hennert zum Grunde in der Diſſertation ſur la vis d' Archimede, qui a remporté le prix de Mathematique adjugé par l' Académie Royale des ſciences & belles lettres de Pruſſe en 1766. Ich werde demnach nun die Reſultate, welche beyde Schriftſteller heraus bringen, mit einander vergleichen.

19. §.

Die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Spindel (2. Fig.) nebſt der relativen Geſchwindigkeit des Waſſers in der umwundenen Röhre ſind gegeben: man ſucht die Beſchleunigung des Elements M nach der Richtung der relativen Bewegung Mv.

Aufl. Es ſey die relative Geſchwindigkeit des Waſſers nach der Richtung $Mv = \sqrt{v}$, ſo iſt wegen dieſer Bewegung die Beſchleunigung des Elements M nach dieſer Richtung $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$. Dieſer Ausdruck gilt unbeſtimmt für jedes Element, weil alle Querſchnitte gleich groß angenommen werden. Ferner ſey die Geſchwindigkeit eines jeden Elements, womit es in ſeinem Kreiſe nach der Richtung Mu herum läuft, $= \sqrt{u}$, ſo entſteht daraus nach der Richtung Mv die Geſchwindigkeit $\cos\eta\sqrt{u}$, die aber der vorigen $\sqrt{v}$ entgegen geſetzt iſt. Setzt man alſo die geſamte Beſchleunigung des Elements M nach der Richtung $Mv = V$, ſo hat man $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$, wenn angenommen wird, daß die Spindel nach der Richtung BPA umläuft. Liefe ſie gegen APB zu, ſo müßte $\sqrt{u}$ das entgegen geſetzte Zeichen haben, und es wäre $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} + \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$. M. ſ. Herrn Eulers Aufſatz a. a. O. im 9. §. woſelbſt eben dieſe Formul aus Herrn Eulers Rechnungen fließt.

Nun ſetze man die Kreisbogen $Ba = \alpha$, $aP = A$, alſo $BP = \alpha - A$, ſo iſt $aM = \frac{A}{\cos\eta}$: und wenn eben dies Stück der Schraubenlinie = s geſetzt wird, ſo iſt $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt \cos\eta}$, folglich $\frac{2}{dt}\, d.\sqrt{v} = \frac{2}{dt \cos\eta}\, d.\frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{u} = \frac{d\alpha}{dt}$, alſo $\frac{2 \cos\eta}{dt}\, d.\sqrt{u} = \frac{2 \cos\eta}{dt}\, d.\frac{d\alpha}{dt}$, und man erhält $V = \frac{2}{dt \cos\eta}\, d.\frac{dA}{dt} - \frac{2 \cos\eta}{dt}\, d.\frac{d\alpha}{dt}$. Das poſitive Glied in dieſem Ausdruck kann man noch mit $\sin\eta^2 + \cos\eta^2 = 1$ multipliciren; ſo erhält man Herrn Hennerts Formul $V = -\frac{2 \cos\eta}{dt}\, d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 \sin\eta \tan\eta}{dt}\, d.\frac{dA}{dt}$. M. ſ. die Preisſchrift §. 10. pag. 71.

20. §.

Die von der Schwere abhängende Beſchleunigung des Elements M nach der Richtung der relativen Bewegung Mv zu finden.

Aufl. Wenn dM das Gewicht des Elements bezeichnet; ſo entſteht daher der Druck nach der Richtung $MX = dM \cos\vartheta$. Dieſe Richtung ſchließt mit (1. Fig.) der Tangente des Kreiſes ZMz, die durch M gehet, einen Winkel $= 90° - ZYM = 90° - BOP$ ein, und es iſt $BOP = \frac{\alpha - A}{a}$, wenn a den Halbmeſſer der Spindel bezeichnet. Zerlegt man alſo die Kraft MX nach der Richtung der Tangente, und auf ihr ſenkrecht, ſo wird jene $= dM \cos\vartheta \cos(90° - BOP) = dM \cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a}$. Mit der Richtung dieſer Tangente ſchließt Mv den Winkel η ein; alſo entſpringt hieraus nach der Richtung Mv die Kraft $dM \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta$. Ferner entſpringt aus dem Gewicht dM nach der Richtung MP der Druck $dM \cos MTP = dM \sin\vartheta$, und dieſer giebt nach der Richtung Mv den Druck $- dM \sin\vartheta \sin\eta$. Daher iſt der geſammte Druck nach der Richtung $Mv = dM \left(\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta\right)$, und dieſer Druck durch die Maſſe dM dividirt giebt die geſuchte Beſchleunigung.

21. §.

Den Druck zu finden, welchen jedes Element M wegen der Zuſammenpreſſung des Waſſers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querſchnitt der Röhre bezeichnet, und $h^2 p$ der Druck iſt, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, ſo wird eben daſſelbe Element nach entgegen geſetzter Richtung den Druck $h^3 (p + dp)$ leiden, und daraus entſteht nach der Richtung Mv die Beſchleunigung $- \frac{h^2 dp}{dM} = - \frac{dp \cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2 dA}{\cos\eta}$ iſt. Hiezu addire man die im vorigen §. gefundene vom Gewicht des Elements herrührende Beſchleunigung, und ſetze die Summe dem im 19. §. gefundenen Ausdruck gleich, ſo erhält man folgende Gleichung $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} = - \frac{2 \cos\eta}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 \sin\eta \tang\eta}{dt} d. \frac{dA}{dt}$. Wofern man dieſe Gleichung integriren kann, ſo iſt p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen

Augenblick der Zeit t den Druck p ſucht, ſo muß t, alſo auch der davon abhängende Bogen α als eine beſtändige Gröſſe betrachtet werden. Man ſiehet ſogleich, wie das Integral gefunden werde, wenn man den Ausdruck $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ aus dem 19. §. für V gebraucht. Dies giebt $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ woraus $dp \cos\eta = dA \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos d \cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta + \frac{du \cos\eta}{dt\sqrt{u}} dA - \frac{da}{dt\sqrt{v}} dA$ folgt, und die Integration giebt $p \cos\eta = C + a \cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta + \frac{A\, du \cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A\, dv}{dt\sqrt{v}}$. Eben die Gleichung findet Herr Euler a. a. O. 12. §. 271. S. Bey ihm das q, was hier p heißt, $\sqrt{u}$ hat das entgegengeſetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läßt, und s iſt bey ihm, was hier A heißt. Ueberdem iſt bey ihm der Bogen $Aa = p$, alſo $AP = p + s$; hier aber iſt $BP = \alpha - A$, und man hat $\sin\frac{\alpha - A}{a} = \sin\frac{p + s}{a}$, $\cos\frac{\alpha - A}{a} = - \cos\frac{p + s}{a}$.

Herr Hennert a. a. O. 14. §. 74. S. ſchreibt ſtatt $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du \cos\eta}{dt\sqrt{u}}$ den Ausdruck durch α und A aus dem 19. §. und dies giebt

$p \cos\eta$

$$p \cos\eta = C + a \cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta$$

$$+ \frac{2A\cos\eta}{dt}\, d \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) - \frac{2A \sin\eta \,\mathrm{tang}\,\eta}{dt}\, d.\, \frac{d.\,A}{dt}.$$

Man darf nämlich die erwähnte Formul nur in der ſchon gefundenen Integralgleichung ſubſtituiren, und ſo müßte nun dieſe Gleichung auch mit der Hennertſchen Integralgleichung a. a. O. einerley ſeyn. Aber Herrn Hennerts Gleichung iſt hievon gänzlich verſchieden. Er multiplicirt ſeine Differentialgleichung, die mit der obenſtehenden nach völlig einerley iſt, mit $d\alpha - dA$ und erhält

$$(d\alpha - dA)\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a}\cos\eta - (d\alpha - dA)\sin\vartheta\sin\eta -$$

$$\frac{dp\, d\alpha \cos\eta}{dA} + dp \cos\eta = - \frac{2(d\alpha - dA)\cos\eta}{dt}\, d.$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2(d\alpha - dA)\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\eta}{dt}\, d.\, \frac{dA}{dt}.$$

Nun integrirt er ſo, daß nicht allein A ſondern auch α, ja $\frac{d\alpha}{dt}$ ſowohl als auch $\frac{dA}{dt}$ veränderlich angenommen werden, und dies giebt $- a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - (\alpha - A)\sin\vartheta\sin\eta - \int \frac{dp\, d\alpha\cos\eta}{dA} + p\cos\eta + C = - \cos\eta.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 + 2\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\eta\left\{\int \frac{1}{dt}\, d\alpha\; d.\, \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right\}$. Dies Verfahren iſt der richtigen Theorie ganz entgegen, und es verleiten den Herrn Hennert zu einer ganz falſchen Auflöſung ſeiner Hauptaufgabe. Man muß nicht mit $d\alpha - dA$, ſondern mit dA multipliciren, ſo erhält man

$$dA \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - d A \sin\vartheta \sin\eta - dp \cos\eta =$$

$$- 2 dA \cos\eta \times \frac{1}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + 2 dA \sin\eta \operatorname{tang}\eta \times \frac{1}{dt}$$

$d. \frac{dA}{dt}$. Was von t abhängt, alſo auch α, muß nun bey der Integration unveränderlich bleiben, es muß ſich nur A und p ändern, und dies vorausgeſetzt, erhält man

$$a \cos\vartheta \cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta - p \cos\eta + C =$$

$$- \frac{2 A \cos\eta}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 A \sin\eta \operatorname{tang}\eta}{dt} d. \frac{dA}{dt},$$ welches völlig die vorhin herausgebrachte richtige Gleichung iſt, ſo wie ſie mit Herrn Eulers Gleichung überein kömmt.

22. §.

Ich werde demnach berechtiget ſeyn, dieſe richtige Gleichung in der Folge zu gebrauchen, da dann vor allen Dingen nun erfordert wird, die beſtändige Gröſſe C zu beſtimmen. Wenn dies geſchehen ſoll, ſo muß man zuforderſt feſtſetzen, ob die Waſſerſchnecke während des ganzen Umlaufs beſtändig mit Waſſer angefüllt angenommen werden ſoll, oder ob man annehmen will, daß von jedem Schraubengange nur ein Theil angefüllt ſey. Herr Hennert ſetzt das erſte voraus, und Herr Euler berechnet beyde Fälle beſonders. Nimmt man die erſte Vorausſetzung an, daß die Schnecke beſtändig ganz mit Waſſer angefüllet ſey, welches in die untere Oefnung ununterbrochen hinein, und aus der obern wieder herausfließt; ſo muß man auch zum Grunde ſetzen, daß die ganze Grundfläche ſich beſtändig unter Waſſer befinde, damit die untere Oefnung nie über dem Waſſer herauf ſteige. Dies widerſpricht der Vorſchrift des 9. §. nicht, denn dort ward vorausgeſetzt, daß ſich bey jedem Umlauf nur der waſſerhaltende Bogen füllen, und die Schnecke nicht ununterbrochen flieſſen ſollte. Iſt nun $PM = Y$, ſo hat man $Y = A \times \tang \eta$, und $A = Y \cot \eta$. Wenn demnach die ganze Länge der Spindel $O\,o = b$ iſt, ſo gehört der obern Oefnung bey C die Ordinate $Y = b$, und der Bogen $A = b \cot \eta$ zu. Weil nun oben das Waſſer ausfließt, ſo muß $p = 0$ ſeyn, wenn $A = b \cot \eta$ iſt. (Der Druck der Atmoſphäre wird beyſeit geſetzt.) Setzt man dieſe Werthe in die für p gefundene Gleichung, ſo erhält man $C = -\, a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta +$

$$b \sin \vartheta \cos \eta - \frac{b\, du \cot \eta \cos \eta}{dt \sqrt{u}} + \frac{b\, dv \cot \eta}{dt \sqrt{v}}.$$

Wenn man hiemit noch die Vorausſetzung verbindet, daß die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Spindel einmal gleichförmig werde, und man ſucht die Bewegung des Waſſers in der Schnecke für dieſen Zuſtand der Maſchine; ſo kann man das, was in du multiplicirt iſt, weglaſſen; weil für dieſen Zuſtand $du = 0$ wird.

23. §.

Die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Schnecke zu finden, vorausgeſetzt, daß die untere Oefnung beſtändig unter Waſſer bleibe, und die Umlaufsgeſchwindigkeit ſchon unveränderlich ſey.

Aufl. Für die untere Oefnung bey a, wo das Waſſer hineintritt, ſey $p = \pi$, ſo iſt zugleich $A = 0$, und dies in die Gleichung des vorigen §. geſetzt giebt

$$\pi \cos \eta = C + a \cos \frac{\alpha}{a} \cos \vartheta \cos \eta.$$

Setzt man hier ſtatt C den vorhin gefundenen Werth, und dividirt durch $\cos\eta$, ſo wird

$$\pi = a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta - a \cos\frac{\alpha - b \cot\eta}{a} \cos\vartheta + b \sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\, dt \sqrt{v}}.$$

Um π zu finden, muß man zuerſt einen Ausdruck für die Tiefe der untern Oefnung unter Waſſer ſuchen, der ſich aus den Formuln des §. ergiebt. Es iſt nämlich die Höhe eines jeden Puncts M über eine durch B horizontal gelegte Ebene $= (AP - Aa) \operatorname{tang}\eta \sin\vartheta + a\left(1 + \cos\frac{AP}{a}\right) \cos\vartheta$, weil das dortige r hier a heißt. Für den Punct a, oder die untere Oefnung iſt $AP = Aa = a.\pi - \alpha$, alſo wird des Puncts a Höhe über die durch B horizontal gelegte Ebene $= a\left(1 + \cos\frac{a.\pi - \alpha}{a}\right) \cos\vartheta$. Iſt nun die Höhe des Waſſers über den Mittelpunct der Grundfläche $= c$, ſo iſt die Höhe des Waſſers über B $= c + a\cos\vartheta$, folglich die Tiefe des Puncts a unter Waſſer $= c - a \cos\frac{a\pi - \alpha}{a} \cos\vartheta$, oder $= c + a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta$. Weil nun das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ in a hinein fließt, ſo gehört der Druck für dieſe Stelle der Höhe $c + a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta - v$. zu, und dies ſtatt π geſetzt, giebt die Gleichung

$$c = - a \cos\frac{\alpha - b \cot\eta}{a} \cos\vartheta + b \sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\, dt \sqrt{v}} + v.$$

Eben dieſe Gleichung findet Herr Euler a. a. O. §. 40. *p.* 295. Um die Vergleichung anzuſtellen, muß man ſich aus dem §. erinnern, daß das hieſige α beym Herrn Euler $a\pi - p$, alſo

$\alpha - b \cot\eta$

$\alpha - b\cot\eta = a\pi - p - b\cot\eta$, folglich $\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} = -\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}$ ſey. Dies giebt Herrn Eulers Ausdruck $\varepsilon = a\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\,dt\sqrt{v}} + v$. Hiebey möchte nun nachfolgendes zu erinnern ſeyn. Der Werth von π ſcheinet wegen der Umlaufsbewegung noch einer Verbeſſerung zu bedürfen. Wenigſtens alsdenn, wenn die Schraube nach BPA zu umläuft, ſcheint der Druck gegen die untere Oefnung größer zu ſeyn. Wenn die Umlaufsbewegung ſchon gleichförmig geworden iſt, und man ſetzt alsdenn die Geſchwindigkeit der Oefnung a, womit ſie jetzt im Kreiſe umläuft $= \sqrt{k}$; ſo ſcheint es, daß man $\pi = c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta + k - v$ ſetzen müße. Dies würde indeſſen auf die folgenden Rechnungen weiter keinen Einfluß haben, als daß man allenthalben $c + k$ ſtatt c ſchreiben müßte. Ich will mich hierüber bald noch etwas näher erklären.

24. §.

Setzt man den Winkel $AOa = \phi$, alſo $Aa = a\pi - \alpha = p = a\phi$; ſo wird $d\alpha = -a\,d\phi$: und weil nun $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ iſt, ſo erhält man $dt = -\frac{a\,d\phi}{\sqrt{k}}$. Setzt man ferner $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$, oder $b\cot\eta = a\gamma$, und $b = a\gamma\tan\eta$; ſo erhält man $\frac{b}{\sin\eta\,dt} = -\frac{\gamma\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi}$, folglich $\varepsilon = a\cos(\phi + \gamma)\cos\vartheta + a\gamma\tan\eta\sin\vartheta - \frac{\gamma\,dv\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi\sqrt{v}} + v$. Noch ſetze man $2\sqrt{kv} = x$, alſo v

$= \frac{zz}{4k}$, und $dv = \frac{z\,dz}{2k}$, $dv\sqrt{k} = \frac{z\,dz}{2\sqrt{k}}$ folglich $\frac{dv\sqrt{k}}{\sqrt{v}} = dz$. Dieſe Werthe in die gefundene Gleichung geſetzt geben $c \cos\eta\, d\phi = a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta\, d\phi + a\gamma\sin\eta\sin\vartheta\, d\phi$

$$-\gamma\, dz + \frac{zz}{4k}\, d\phi\cos\eta,$$ oder

$$-\gamma\, dz + \frac{zz}{4k}\, d\phi\cos\eta + a\,d\phi\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta$$

$$= (c.\ \cos\eta - a\gamma\sin\eta\sin\vartheta)\, d\phi.$$

Die bisher bekannten Kunſtgriffe der Integralrechnung reichen nicht hin, das Integral dieſer Gleichung zu finden, ohne nur in dem beſondern Fall, wenn die Spindel vertical ſteht, alſo $\sin\vartheta = 1$, und $\cos\vartheta = 0$ iſt. Alsdenn hat man

$-\gamma\, dz + \frac{zz}{4k}\, d\phi\cos\eta = (c.\ \cos\eta - a\gamma\sin\eta)\,\vartheta\phi$; oder wenn $\frac{b\cot\eta}{a}$ ſtatt γ wieder geſetzt wird

$$-\frac{b}{a\sin\eta}\, dz + \frac{zz}{4k}\, d\phi = (c-b)\, d\phi,$$

woraus $\frac{a\sin\eta}{b}\, d\phi = -\frac{4k\,dz}{4k(c-b) - zz}$ folgt, oder auch

$$\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\, d\phi = -\frac{dz : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - zz : (4k(c-b))}.$$

Das Integral hievon iſt

$\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1 + z : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - z : \sqrt{4k(c-b)}}$; und weil $\frac{z}{\sqrt{4k}} = \sqrt{v}$ war, ſo erhält man $\frac{a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}$. Die beſtändige Größe C muß aus dem anfänglichen Zuſtande der Bewegung beſtimmt werden. Nimmt man an, daß $\sqrt{v} = 0$ ſey, wenn $\phi = 0$ iſt, ſo wird $C = 0$, und

$\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-l.)}}{b\sqrt{4k}}\Phi = -l\frac{\sqrt{(c-b)}+\sqrt{v}.}{\sqrt{(c-b)}-\sqrt{v}}$. Beym Fortgang der Bewegung, wenn die untere Oefnung von A durch α, b, β, u. ſ. f. umläuft, wird nun Φ negativ, und dies giebt $\frac{\sqrt{(c-b)}+\sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)}-\sqrt{v}} = \rho^{\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi}$, woraus $\sqrt{v} = \frac{\rho^{\psi}-1}{\rho^{\psi}+1}\sqrt{(c-b)}$ folgt, wenn der Kürze wegen ψ ſtatt $\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi$ geſchrieben wird.

25. §.

Wenn man nun aus dieſer Gleichung Schlüße ziehen wollte, ſo wäre vornehmlich zu erwägen, in wie weit die angenommenen Beſtimmungen für den anfänglichen Zuſtand der Bewegung beſtehen können. Es iſt angenommen worden, daß dem Werth $\Phi = 0$ der Werth $v = 0$ zugehöre, und dieſe Vorausſetzung würde ihre Anwendung finden, wenn man annähme, die Schnecke ſey anfangs ganz mit Waſſer angefüllt und die untere Oefnung verſchloſſen geweſen, hierauf aber, nachdem die Schnecke beym Umlauf um ihre Axe, und mit ihr das Waſſer in der Röhre, ſchon die Geſchwindigkeit $\sqrt{k}$ erreicht hatte, die untere Mündung plötzlich eröfnet worden. In ſolchen Fällen alſo, wo es mit der Bewegung der Waſſerſchraube dieſe Bewandniß hätte, würde die Gleichung $\sqrt{v} = \frac{\rho^{\psi}-1}{\rho^{\psi}+1}\sqrt{(c-b)}$ ihre Anwendung finden, und weil der Werth von ρ^{ψ} mit Φ ſehr ſchnell wächſt, ſo würde die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre ſehr bald unveränderlich und $\sqrt{v} = \sqrt{(c-b)}$ werden. Dieſe beſtändige Geſchwindigkeit würde man auch aus der Differential-Gleichung finden, wenn man $d\Phi = 0$ ſetzte. Ueberhaupt aber ergeben dieſe Schlüſſe, daß das Waſſer nur unter der Bedingung in der Röhre würde hinauf ſteigen können, wenn $c > b$ wäre, oder vielmehr der am Ende des

23. §. beygefügten Erinnerung gemäß, wenn $c+k>b$ wäre. Eigentlich wird allemal $b>c$ ſeyn, wenn es alſo mit der eben erwehnten Erinnerung ſeine Richtigkeit hat, ſo kann das Waſſer nur alsdenn in der Röhre ſteigen, wenn $k>c-b$ iſt. Wenn $b>c$ iſt, (man kann $c+k$ ſtatt c verſtehen) und man ſetzt nun $\rho\ \frac{2\,a\,\mathit{ſin}\,\eta\,\sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4\,k}}\,\phi=\psi$, ſo hat man $\sqrt{v}=\frac{\rho\,\psi\sqrt{-1}-1}{\rho\,\psi\sqrt{-1}+1}$ $\sqrt{(b-c)}\sqrt{-1}$, alſo $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}}=-\frac{\rho\,\psi\sqrt{-1}-1}{(\rho\,\psi\sqrt{-1}+1)\sqrt{-1}}$ $=-\,tang\,\frac{1}{2}\,\psi$. Dieſer Ausdruck giebt die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre, falls die Spindel nach BPA zu umläuft, gleich vom erſten Augenblick der Bewegung negativ, und daraus erhellet, daß das Waſſer gar nicht ſteigen könne, ſondern ſogleich anfangen müße, zurück nach unten zu fließen. Uebrigens aber kann die Gleichung nicht dienen, beym Fortgang der Bewegung die Geſchwindigkeit des zurückfließenden Waſſers daraus zu berechnen, weil die Rechnung im 22. §. vorausſetzt, daß die Röhre beſtändig voll Waſſer bleibe.

26. §.

Es ließ ſich voraus ſehen, daß die Rechnung dies Reſultat geben müße, wofern aus dem beſtändigen Anſtoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen nicht ein ſolcher Druck entſteht, der das Waſſer hinauf zu treiben im Stande iſt. Aus der Schwungbewegung um die Axe der Spindel können hier gar keine Kräfte entſtehen, die das Waſſer hinauf treiben, weil die Richtung aller Schwungkräfte hier auf der centriſchen Linie der Röhre ſenkrecht iſt, und die geſammte Wirkung der Schwungkräfte hier von der Röhre ſelbſt völlig aufgehalten wird. Mit der Maſchine des Herrn de Mour, worüber Herr Euler in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin A. 1751. pag. 303.

ſeqq. eine umſtändliche Unterſuchung angeſtellet hat, wird das Waſſer deswegen zum Steigen gebracht, weil die Richtung der Schwungkräfte auf der centriſchen Linie der Röhre nicht ſenkrecht iſt, und daher ihre Wirkung von der Röhre nicht ganz aufgehoben werden kann. Was übrigens den Druck gegen die untere Mündung der um die Spindel gewundenen Röhre betrift, ſo müßte man bey einer genauern Rechnung noch erwegen, daß dieſer Druck beym Fortgang der Bewegung nicht unveränderlich bleiben würde. Durch den Umlauf der Spindel wird auch dem Waſſer an der Stelle, wo die Schraube ſteht, eine wirbelförmige Bewegung ebenfalls nach BPA zu mitgetheilt. Wegen dieſer eigenen Bewegung der Waſſertheilchen, welche der untern Mündung unterweges aufſtoſſen, hängt die Wirkung des Stoſſes nur von der reſpectiven Geſchwindigkeit der untern Mündung in Anſehung der Geſchwindigkeit des Waſſers ſelbſt ab, die alſo ſo lange veränderlich bleiben würde, als ſich noch die Geſchwindigkeit des Waſſers ändert. Wenn alles ſo weit in den Beharrungsſtand gekommen wäre, daß das Waſſer in demſelben Kreiſe, den die untere Mündung durchläuft, ebenfalls mit der Geſchwindigkeit $\surd k$ umliefe, ſo würde weiter kein Druck gegen die Mündung wegen des Anſtoſſes entſtehen, weil nun eigentlich gar kein Anſtoß weiter erfolgen könnte. Demnach könnte das Waſſer in der Schnecke gar nicht ſteigen.

27. §.

Ob nun gleich der bisher betrachtete Fall, wenn die Spindel der Waſſerſchraube vertical ſtehet, in der Ausübung nicht vorkömmt, weil ſie allemal gegen den Horizont ſchief gelegt wird; ſo dienen doch die bisherigen Schlüße dazu, auch ohne weitere Rechnung zu überſehen, was bey der geneigten Lage der Spindel erfolgen müſſe. Auch in dieſem Falle können die Schwungkräfte dazu nichts beytragen, daß das Waſſer in der Röhre zu ſteigen genöthiget werde. Wenn dies erfolgen ſollte, ſo müßte der von dem Anſtoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen herrührende Druck dies zuwege bringen, der jedoch veränderlich ſeyn, mit dem Fortgang der Bewegung abnehmen, und zuletzt gar aufhören würde. Es ſcheinet alſo, daß man hieraus mit ziemlicher Sicherheit ſchließen könne, die Waſſerſchraube könne das Waſſer nie ununterbrochen heben, was man ihr auch für eine Lage gegen den Horizont geben wollte. Herr Euler entſcheidet hierüber nichts, er bricht hier ſeine Unterſuchungen ab, erklärt die Theorie der Waſſerſchraube für höchſt ſchwer, und fodert andere Geometer auf, ihre Kräfte bey dieſer Aufgabe gleichfalls zu verſuchen. Eben dies hat auch wohl veranlaſſet, daß von der Berliniſchen Academie der Wiſſenſchaften im Jahre 1765. dieſe Aufgabe iſt zur Preisfrage aufgegeben worden, und ich werde nun näher prüfen, wie weit H. Hennert die Preisaufgabe aufgelöſt habe.

28. §.

Er nimmt an, die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ des Waſſers in der Röhre werde beym Fortgang der Bewegung unveränderlich: eine Vorausſetzung, die, wie man leicht ſiehet, bewieſen werden muß, bevor ſie als ausgemacht angenommen werden kann. Iſt ſie wahr, ſo muß aus der Differentialgleichung, wenn in derſelben $dz = 0$ geſetzt wird, eine Gleichung folgen, die $z = 2\sqrt{kv}$ allein durch beſtändige Gröſſen beſtimmt. Aber die Differentialgleichung (24. §.) giebt $\frac{zz}{4k}\cos\eta + a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta = c.(\cos\eta - a\gamma\sin\eta\sin\vartheta)$, wenn $dz = 0$ geſetzt wird, woraus $\frac{zz}{4k} = v = c - a\gamma\,\mathrm{tang}\,\eta\sin\vartheta - a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta$ folgen würde. Weil dieſer

ſer Ausdruck offenbar von der veränderlichen Größe ϕ abhängt, ſo widerſpricht die Folge der Vorausſetzung, und es ergiebt ſich, daß die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ nie unveränderlich werden könne. Dieſe Gleichung würde alſo nur nach Beſchaffenheit der Umſtände einen größten oder kleinſten Werth geben. Ja wenn c nichts weiter als die Tiefe bedeutet, um welche der Mittelpunct der Grundfläche unter Waſſer ſteht, ſo würde ſogar $\sqrt{v}$ unmöglich werden. Es war nämlich $a\gamma = b\cot\eta$ (24. §.) alſo würde $v = c - b\sin\vartheta - a\cos(\phi + \gamma)\cos\vartheta$ negativ werden, weil $b\sin\vartheta > c$ iſt.

29. §.

Man wird ſich aber aus dem 21. §. erinnern, daß H. Hennert wegen eines Verſehens bey der Integration eine unrichtige Differentialgleichung herausgebracht habe, und deswegen wird man vermuthen, daß aus ſeiner Differentialgleichung eine ſolche unveränderliche Geſchwindigkeit folge. Ich will verſuchen, ob ich ihm in ſeinen Schlüſſen folgen kann. In der Gleichung für p, (21. §.) ſo wie ſie H. Hennert heraus bringt, ſetze man $A = b\cot\eta$, und $p = 0$, dem 22. §. gemäß, das Integral $\int\frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA}$ nehme man ſo, daß es mit p zugleich verſchwindet, und bey eben dieſer Vorausſetzung $A = b\cot\eta$, ſey $-\cos\eta.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = M$, ſo wie $2\sin\eta\tang\eta\left(\int\frac{1}{dt}\,d\alpha\,d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\frac{(dA)^2}{(dt)}\right) = N$. (Ich muß ſo nachrechnen, wie H. Hennert mir vorrechnet, ſonſt müßte hier alles, was von t abhängt, unveränderlich bleiben.) Dies giebt $-a\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a}\cos\vartheta\cos\eta - (\alpha - b\cot\eta)\sin\vartheta\sin\eta + C = M + N$, und es wird die beſtändige Größe $C = M + N +$

$a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta + (\alpha - b \cot \eta) \sin \vartheta \sin \eta$. Setzt man dieſen Werth ſtatt C in die Hennertſche Integralgleichung im 21. §. ſo müßte nun eine Gleichung kommen, woraus ſich p finden ließe, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{u}$, und $\frac{dA}{dt} = \cos \eta \sqrt{v}$ (19. §.) als bekannt angeſehen werden. Nach H. Hennerts Rechnung würde das nun noch nicht angehen, weil in ſeiner Gleichung noch das Integral $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA}$ vorkömmt, und bey ihm α ſowohl als A veränderlich iſt. Mit dieſem Integral aber wird H. Hennert ſo fertig. Er nimmt gleich an, nach Verlauf einiger Zeit werde nicht allein die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Spindel, ſondern auch die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre $\sqrt{v}$ unveränderlich, alſo ſey alsdenn $\frac{d\alpha}{dA} = \frac{\sqrt{u}}{\cos \eta \sqrt{v}}$ unveränderlich, und findet dieſer Vorausſetzung gemäß $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA} = \frac{p \sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, da er denn k ſtatt des hieſigen u ſchreibt, ſo wie auch oben im 23. ſtatt u der Buchſtab k gebraucht iſt, für den Fall, wenn die Umlaufsbewegung gleichförmig wird. Nach H. Hennert iſt aber von nun an auch $\sqrt{v}$ unveränderlich. Hiernächſt nimmt er nun dem 23. §. gemäß in ſo weit ganz richtig an, für die untere Mündung der Röhre gehöre der Druck der Höhe $c + a \cos \frac{\alpha}{a} \cos \vartheta - v$ zu; ſetzt in ſeiner Gleichung für p den eben erwehnten Werth ſtatt p, und zugleich $A = 0$. So müßte nun freylich eine Gleichung heraus kommen, woraus v gefunden werden könnte: weil aber nach ſeiner Vorausſetzung nun $\sqrt{v}$ ſchon unveränderlich ſeyn ſoll; ſo muß man auch $d. \sqrt{v} = 0$, alſo $d. \frac{dA}{dt} = 0$, oder $ddA = 0$ ſetzen, und dies müßte eine Gleichung zwiſchen v oder $\sqrt{v}$ und lauter beſtändigen Größen geben. Es wird mir in der That ſchwer, dem H. Hennert in ſeinen Schlüſſen weiter nachzufolgen. Entweder ich verſtehe den 15. §. der Preisſchrift gar nicht, oder H. Hennert verſieht ſich hier nochmal, wenn er ſchließt: für die untere Mündung iſt $A = 0$, alſo auch $dA = 0$ und $ddA = 0$. Soviel iſt wahr, daß nach ſeiner Vorausſetzung $ddA = 0$ ſey, weil er $\sqrt{v} = \frac{dA}{dt \cos\eta}$ unveränderlich annimmt: aber $dA = 0$ ſetzen, heißt das hier nicht eben ſoviel, als $\sqrt{v} = 0$ ſetzen? Geſetzt auch, H. Hennert wollte antworten, man müße bey dieſer Rechnung A nicht als eine Function von t betrachten, ſondern nur als eine veränderliche Größe, wovon die Geſtalt der Röhre abhängt; ſo iſt es ja doch falſch geſchloſſen: wenn eine veränderliche Größe in einem beſtimmten Fall $= 0$ wird, ſo wird auch ihr Differential $= 0$. Herrn Hennerts Schluß wäre richtig, wenn A den **unveränderlichen** Werth $= 0$ haben müßte, und das iſt hier der Fall gar nicht. Ich muß indeſſen mit H. Hennert weiter rechnen, und ſeinen Schlüſſen gemäß $\cos\eta . \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = \frac{\cos\eta . d\alpha^2}{dt^2} = \cos\eta . k$, und überdem $2 \sin\eta \, \mathrm{tang}\,\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha \, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2} . \frac{dA^2}{dt^2} = 0\right.$ ſetzen. Wenn ich alsdenn Kürze halber π ſtatt $c + a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta - v$ ſchreibe, ſo verwandelt ſich H. Hennerts Gleichung (21. §.) in folgende: $- a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\vartheta \cos\eta - \alpha \sin\vartheta \sin\eta - \frac{\pi\sqrt{k}}{\sqrt{v}} + \pi \cos\eta + M + N + a \cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\vartheta \cos\eta + (\alpha - b \cot\eta) \sin\vartheta \sin\eta = - k \cos\eta$.

Nun ſollte $M = - \cos\eta \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2$, und $N = 2 \sin\eta \, \mathrm{tang}\,\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha \, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}. \frac{dA^2}{dt^2}\right)$ ſeyn, in der Vorausſetzung, daß $A = b \cot\eta$ genommen werde. Ich wüßte nicht, wie ich das machen ſollte, dieſe Werthe herauszubringen: mit H. Hennert aber ſetzt man $\frac{d\alpha}{dt} = \surd k$, $\frac{dA}{dt} = \cos\eta \surd v$, $= \int d. \frac{dA}{dt}$, und man findet $M = - \cos\eta (\surd k - \cos\eta \surd v)^2$, $N = 2 \sin\eta \, \mathrm{tang}\,\eta \times (\cos\eta \surd kv - \frac{1}{2} v \cos\eta^2) = 2 \sin\eta.^2 \surd kv - \sin\eta^2 \cos\eta \, v$. Man wird leicht ſehen, wenn dieſe Werthe ſtatt M und N geſetzt werden, was die Gleichung für eine Geſtalt annimmt, es wird völlig diejenige, die H. Hennert ſelbſt herausbringt auf der 76. S. der Preisſchrift. Um die Vergleichung deſto beſſer anzuſtellen, bemerke ich nur, daß das hieſige η, ϑ, b, beym H. Hennert ϕ, $90° - \vartheta$, und c heiße, und was hier c heißt, iſt bey ihm $h - a \sin\vartheta$. Die gefundene Gleichung müßte nun außer v keine andre als beſtändige Größen enthalten, $\surd k$ auch für eine beſtändige Größe genommen. Aber ein einziger Blick auf die Gleichung ergiebt ja, daß noch außerdeme der Bogen α darinn vorkomme. Wenn man z ſtatt $\surd v$ ſchreibt und die Gleichung nach den Potenzen von z ordnet, ſo wird ſie cubiſch. H. Hennert rechnet weiter, und bringt heraus, daß dieſe cubiſche Gleichung zwey unmögliche Wurzeln, und eine negative Wurzel habe, alſo $z = \surd v$ allemal negativ ſey. Uebrigens hängt doch ſeine Formul für dieſe negative Wurzel noch immer von dem veränderlichen Bogen α ab, und ich begreife nicht, wie dies mit der Vorausſetzung beſtehen könne, daß nun $\surd v$ unveränderlich ſey. Ferner würde ja der negative Werth von $\surd v$ anzeigen, daß das Waſſer in der Röhre nicht gegen die obere Oefnung zu, wie während der Rechnung vorausgeſetzt iſt, ſondern gegen die untere Oefnung zu laufe, und das hieße: die Schnecke kann gar kein Waſſer heben. H. Hennert erklärt ſich über ſeinen negativen Werth von $\sqrt{v}$ ganz anders. Er ſagt, dies komme daher, weil das Waſſer ſteigend in die Schnecke hineindringe, und fallend heraus trete, Steigen und Fallen aber entgegengeſetzte Bewegungen ſeyn. Wie doch ein Irrthum immer mehrere nach ſich zieht! Bezeichnet denn nicht $\sqrt{v}$ unbeſtimmt die Geſchwindigkeit des durch einen jeden Querſchnitt der Röhre laufenden Waſſers, ſowohl deſſen, was oben ausläuft, als auch deſſen, was unten eintritt?

30. §.

Am meiſten wundre ich mich darüber, daß dasjenige, was H. Hennert im 16. §. 78. S. der Preisſchrift vorträgt, ihn nicht auf das fehlſame ſeiner Theorie aufmerkſam gemacht hat. Hier ſoll die Menge Waſſer beſtimmt werden, welche die Schnecke in gegebener Zeit t heben wird. Dieſe müßte $= f^2 t \sqrt{v}$ ſeyn, wenn f^2 den Querſchnitt der Röhre bedeutet. Aber, heißt es hier, man muß bemerken, daß **das Waſſer nicht ununterbrochen durch die Schnecke fließe.** Dies lehrt die Erfahrung nach H. Hennerts Bericht bey den in Holland jetzt üblichen Waſſerſchnecken, deren Grundflächen ganz unter Waſſer ſtehen. Das Waſſer hört auf zu fließen, noch ehe die Spindel den halben Umlauf vollendet hat: während des übrigen Theils eines Umlaufs fließt nichts heraus. Fließt es denn nicht etwa während dieſer Zeit erſtlich um eine gute Strecke zurück, und kehrt nachher wieder um? oder bleibt es während dieſer Zeit in der Röhre ruhig? darüber erklärt ſich H. Hennert nicht. Aber dem ſey, wie ihm wolle, wenn das Waſſer während eines jeden Umlaufs zu fließen aufhört, und eine zeitlang nachher wieder anfängt zu fließen, wie läßt ſich denn in aller Welt die Vorausſetzung rechtfertigen, daß $\sqrt{v}$ unveränderlich werde? Hier muß H. Hennert doch wirklich die Schwäche ſeiner Theorie gefühlt haben. Denn gegen das Ende des 16. §. wo er die Waſſermenge bloß aus einigen Beobachtungen beſtimmt, und ohngefehr ein Mittel genommen, auf $\frac{2}{3} f^2 t \sqrt{v}$ ſchätzt, ſetzt er hinzu: les remarques, que nous venons de faire, ſont tres importantes pour la theorie de cette machine. Elles ont echappé aux Mechaniciens (das denke ich eben nicht, denn die meiſten, welche ich habe nachſchlagen können, ſagen, daß das Waſſer aus der Schnecke nicht ununterbrochen fließe.) Cependant elles ne laiſſent pas que de rendre la theorie un peu incertaine.

31. §.

Weil Erfahrungen, die man mit der Theorie vergleichen kann, vorzüglich intereſſant ſind, ſo will ich noch diejenigen herſetzen, welche H. Hennert im 17 bis 20 §. vom Effect einiger Waſſerſchrauben erzählt. Die in Holland ehedem üblich geweſenen Waſſer-Schrauben, welche Waater-Mooler hießen, und zur Austrockung der Wieſen gebraucht wurden, lagen faſt horizontal, und hoben das Waſſer auf eine ſehr geringe Höhe. Wenn ſie das Waſſer 4 Fuß hoch heben, ſo heißen ſie Sheprad-Moolen, und in der Herrſchaft Hazerswoude nahe bey Leiden hat man vier dergleichen Schrauben über einander geſtellt, um das Waſſer 16 Fuß hoch zu heben. Ohngefehr um das Jahr 1754. ward von einigen Kunſtverſtändigen in Vorſchlag gebracht, den Neigungswinkel gegen den Horizont 60° groß zu machen, um das Waſſer auf größere Höhen zu bringen. Vieleicht verfiel man daher darauf, weil Daniel Bernoulli dieſen Winkel angegeben hat. Man zog H. Lulofs zu Rath, und auf deſſen Empfehlung wurden dergleichen Maſchinen mit Waſſerſchrauben unter dem Winkel von 60° erbauet, die den Namen Vyzel-Moolen erhalten haben. Alle werden durch Windflügel getrieben.

Mit dreyen Vyzel-Moolen, die, wie es ſcheint, nicht weit von einander angelegt ſind, und welche H. Hennert durch die Namen der nordlichen, der mittlern und der ſüdlichen nach ihrer Lage unterſcheidet, hat man Erfahrungen angeſtellet. Um jede Spindel ſind drey Röhren gewunden, deren viereckte Oefnungen um gleiche Bogen von einander abſtehen. Die Oefnung der Gänge an der nordlichen Schraube beträgt 1, 36 Quadr. Fuß, an der mittlere 1, 46 Q. F. und an der ſüdlichen 1, 41 Q. F. die Halbmeſſer ihrer Spindeln ſind 35, 37, 36 Zoll, die Winkel η ſind 11° 55′, 14° 42′, 11° 54′, dieſe findet man aus den Entfernungen der Schraubengänge, welche 23, 29, 24 Zoll betragen. Der Winkel ϑ iſt für alle = 60 Grad, die ganze Länge der Spindel $14\frac{1}{2}$ Fuß, und ſie ſtehen ohngefehr 4 Fuß tief unter Waſſer. (Ich ſetze dieſe Zahlen alle ſo her, wie ſie auf der 81. S. der Preisſchrift ſtehen, werde aber unten verſchiedenes dabey erinnern müßen.) Man hat jede dieſer Mühlen eine Zeitlang arbeiten laſſen, und die in dieſer Zeit gehobene Menge Waſſer gemeſſen; auch hat man die Anzahl der Umläufe der Windflügel bemerkt, und daraus die Zahl der Umläufe der Schrauben geſchloſſen, wovon vermöge der Einrichtung der Maſchine beynahe anderthalb auf einen Umlauf der Windflügel kammen.

32. §.

Der Erfahrungen ſelbſt ſind an der Zahl 17, die alle auf der 82 Seite der oft erwehnten Preisſchrift ſtehen. H. Hennert verwirft aber die erſte, vierte, zehnte, dreyzehnte, vierzehnte, und ſechszehnte, als ſolche, die zu weit von ſeiner Theorie abweichen. Die übrigen ſtehen auf der 84 S. nochmal, aber die dortigen Zahlen kommen mit den auf der 82 S. befindlichen nicht alle überein. H. Hennert hat aus der Anzahl der Umläufe die Winkelgeſchwindigkeit der Spindel, und daraus die Geſchwindigkeit der in der centriſchen Linie der Röhre liegenden Puncte geſchloſſen, welches hier $2\sqrt{gk}$ wäre. Dieſe letztern Geſchwindigkeiten ſind größtentheils auf der 84 S. anders als auf der 82 S. angegeben. Ich ſetze ſie ſo her, wie ſie auf der 84 Seite ſtehen.

Erfahrungen.	Winkelgeſchwindigkeit der Spindel.	Werth von $2\sqrt{gk}$.	Waſſermenge in Cub. Fußen für 1. Minute	Namen der Schrauben.
2	81°	4, 10	181	nordliche Schraube.
3	98°30′	4, 95	227	
5	117°	5, 93	273	
7	79°	4, 50	217	mittlere Schraube.
8	85° 30′	4, 60	228	
9	108°	6, 94	294	
11	130°	7, 00	356	
12	124°	6, 59	367	ſüdliche Schraube.
15	121°30′	6, 52 6, 35	beyde zuſ. 648	die mittlere u. ſüdliche.
17	187° 15′	9, 46 10, 00 9, 77	alle drey Schrauben zuſammen 1140.	

Dieſe Erfahrungen vergleicht nun H. Hennert mit ſeiner Theorie, aber ich weis in der That ſelbſt nicht recht auf welche Art. Seine Gleichung für $\sqrt{v}$ hängt von α ab, und weil $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ iſt, ſo iſt $\alpha = t\sqrt{k}$. Dies iſt nämlich der Weg, den die untere Mündung der Röhre in der Zeit t durchläuft. Setzte nun H. Hennert $t\sqrt{k}$ ſtatt α in die Gleichung, ſo würde $\sqrt{v}$ von t abhängen, und ſich folglich mit t ändern. Aber es ſoll $\sqrt{v}$ unveränderlich ſeyn, und dieſe einmal zum Grunde geſetzte Vorausſetzung bringt H. Hennert dahin, daß er den Bogen α für das anſieht, was ſonſt Geſchwindigkeit heißt. Daher ſetzt er auf der 81. S. $\alpha = \sqrt{60\,k}$, und nimmt alſo α für die Geſchwindigkeit, die der Höhe k zugehört. Dies iſt ein neuer Irrthum, der zu den vorigen noch hinzu kömmt, alſo iſt es wohl nicht zu verwundern, daß die von ihm angeführten Erfahrungen ſo wenig mit ſeiner Theorie zuſammen treffen wollen. Alle Waſſerſchrauben haben ſehr viel weniger Waſſer in einer Minute gegeben, als ſie nach Herrn Hennerts Rechnung thun ſollten, und der Fehler hat bald ein Drittel bald die Hälfte der ganzen berechneten Waſſermenge betragen: gewöhnlich iſt er zwiſchen dieſe Gränzen gefallen. Das meint nun zwar H. Hennert nicht: nach ihm beträgt die gröſte Abweichung der beobachteten Waſſermengen etwa nur den 9ten oder 10ten Theil der nach ſeiner vermeintlichen Theorie berechneten, und zwey Beobachtungen geben faſt gerade eben das, was er nach der Theorie gefunden zu haben angiebt. Allein H. Hennert verbirgt hier die gröſſere Abweichung ſeiner Theorie von der Erfahrung auf eine ganz künſtliche Art. Er reducirt erſtlich das eigentliche Reſultat ſeiner Theorie auf denjenigen Theil, worauf er ihn nach einer andern **aus der Erfahrung geſchloſſenen Regel** reducirt wiſſen will, die auf der 78. und 79. S. der Preisſchrift ſtehet, und hier ſchon im §. angeführt iſt. Dieſe reducirte Waſſermenge vergleicht er nun wieder mit derjenigen, welche die im Anfang dieſes §. angeführten Erfahrungen gegeben haben. Die Zahlen, welche er angiebt, ſind folgende.

Erfahrungen.	berechnete Waſſermenge.	reducirte Waſſermenge.	beobachtete Waſſermenge.	Diff.
2	273 C. Fuß	182	181	1
3	386	258	227	31
5	529	252	273	80
7	406	271	217	54
8	365	243	228	25
9	487	325	294	31
19	659	430	356	74
12	557	371	367	4
15	1068	712	648	64
17	2183	1453	1140	313

Ob nun gleich bey der erſten Erfahrung die beobachtete Waſſermenge von der berechneten um ein Drittel der letztern abweicht, ſo ſagt H. Hennert doch, ſie weiche gar nicht ab, weil die beobachtete Waſſermenge mit der reducirten übereinkömmt, und obgleich bey der letzten Erfahrung die beobachtete Waſſermenge wenig mehr als die Hälfte der berechneten ausmacht, und ſelbſt die Differenz von der reducirten Waſſermenge nicht viel weniger als $\frac{1}{4}$ der letztern ausmacht; ſo will H. Hennert doch nicht, daß der Fehler mehr als ohngefehr $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{9}$ betrage, denn, ſagt er, man muß hier nur $\frac{7}{12}$ der berechneten Waſſermenge bey der Reduction nehmen, und alsdenn beträgt der Fehler nur $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{10}$. So künſtlich vergleicht man ſonſt keine Erfahrungen mit der Theorie, und H. Hennert legt ſeiner Theorie doch wohl zuviel Lob bey. Die Differenzen der beobachteten, von ſeiner ſogenannten reducirten Waſſermenge ſind ja keine Differenzen von der nach ſeiner Theorie berechneten Menge: alſo ſind die von ihm angegebenen Abweichungen nicht **Abweichungen von der Theorie**, ſondern Abweichungen von ſeinen aus Beobachtungen geſchloſſenen Regeln.

33. §.

33. §.

Wenn es nun mit den bisherigen Erinnerungen gegen des H. Hennerts Vortrag ſeine Richtigkeit hat, ſo werde ich auch berechtiget ſeyn, zu behaupten, daß H. Hennerts Regeln, die Waſſermenge zu berechnen, welche die Waſſerſchraube in gegebener Zeit heben ſoll, für die Ausübung ganz unbrauchbar ſind. Es fehlet ſehr viel, daß H. Hennert das Haupt-Problem von der Waſſerſchraube ſollte aufgelöſt haben, deſſen Auflöſung H. Euler unvollſtändig laſſen mußte. Wollte man auf dem richtigen Wege, den H. Euler betreten hat, weiter gehen; ſo müßte man bey der Differentialgleichung des 24. §. die Methode durch Reihen zu integriren anwenden: man würde auf ſolche Art eine Reihe finden, welche z durch Φ ausdrückte. Ich denke, man hat nicht nöthig, die Mühe dieſer Rechnung zu übernehmen; man kann ſich ohnehin überzeugen, daß das Waſſer bey der geneigten Lage der Schnecke ſo wenig, als bey ihrem ſenkrechten Stande (§.) durch die obere Mündung **ununterbrochen** durchfließen könne. Wenn in jedem Schraubengange nur die waſſerhaltenden Bogen voll Waſſer ſind, ſo läßt ſich begreifen, daß das Waſſer beym Umlauf der Spindel höher ſteigen könne. Wenn aber die ganze Röhre von unten bis oben voll Waſſer iſt; ſo iſt offenbar, daß alles unten auslaufen würde, wenn die Schraube nicht umliefe, und man die untere Mündung öfnete. Beym Umlauf der Spindel entſtehen keine Kräfte, die das Waſſer nach der Richtung der Röhre gegen die obere Mündung zu treiben können, es wäre denn, daß aus dem Anſtoß der untern Mündung gegen die im Wege liegenden Waſſertheilchen ein ſo ſtarker Druck entſtünde, der dies ausrichten könnte. Im 26. §. ſind aber die Urſachen ſchon angegeben, weswegen dieſer Druck beym Fortgang der Bewegung ſchwächer werden müßte, wenn er gleich beym Anfang der Umlaufsbewegung noch beträchtlich genug wäre. Man begreift auch leicht, daß die Umlaufsbewegung ſchon ziemlich ſchnell ſeyn müßte, wenn der Druck gegen die untere Mündung ſtark genug werden ſollte, das Waſſer hinauf zu treiben.

34. §.

Geſetzt aber, daß das Waſſer bey hinlänglicher Schnelligkeit der Umlaufsbewegung, wenigſtens auf eine Zeitlang zum ununterbrochenen Durchfließen gebracht werden könnte; geſetzt die Integration der Differentialgleichung, welche die Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden diente, hätte keine große Schwierigkeit, und führte auch nicht auf ſehr verwickelte Formuln: ſo dünkt mich doch, daß hiebey noch wichtige Mängel übrig bleiben würden, die keine ſonderliche Uebereinſtimmung der Reſultate der Theorie mit dem wirklichen Erfolg würden erwarten laſſen. Die Differentialgleichung gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß alle Waſſertheilchen, die in einerley auf der centriſchen Linie ſenkrechten Querſchnitt liegen, von einerley Kräften beſchleuniget werden, und daß die Schwungkräfte insgeſammt von der Röhre aufgehalten werden, ohne auf die Bewegung des Waſſers Einfluß zu haben. Eigentlich aber würde dies alles, ſo wie überhaupt diejenigen Grundſätze von der Bewegung des Waſſers in Röhren, worauf die Rechnung gebauet iſt, nur in völliger Schärfe gelten, wenn die Querſchnitte der Röhre unendlich klein wären. Alſo würde eine völlige Entwickelung der aus dieſen Grundſätzen geſchloſſenen Gleichungen alsdenn nur für die Ausübung einen erheblichen Nutzen verſprechen, wenn die um die Spindel gewundene Röhre eine ſehr geringe Weite hätte. Wenn man aber weis, daß es eine gewöhnliche Maxime ſey, dieſen Röhren eine beträchtliche Weite zu geben, damit deſto mehr Waſſer zur Zeit durchfließen könne, ſo wird man alle Hofnung aufgeben, daß die auf ſehr enge Röhren eingeſchränkte Theorie hier mit erheblichem Nutzen angewandt werden könne.

Wenn die Waſſerſchraube inwendig nach Art einer Wendeltreppe eingerichtet iſt, ſo etwa, wie man beym Leupold Zeichnungen davon antrift; ſo weicht ihre ganze inwendige Geſtalt von derjenigen, welche die obige Rechnung vorausſetzt, ſo ſehr ab, daß ich gar keine Uebereinſtimmung der auf ſehr enge Röhren eingeſchränkten Theorie erwarten würde, wenn auch alle Schwierigkeiten der Rechnung überwunden wären.

35. §.

Eben dieſe gewöhnliche Geſtalt der Waſſerſchrauben, die von derjenigen, welche die obige Rechnung vorausſetzt, ſo ſehr abweicht, macht es mir begreiflich, woher er kömmt, daß eine ſolche Waſſerſchraube das Waſſer zum Steigen bringen kann, wenn gleich die untere Mündung beym Umlauf beſtändig unter dem Waſſer bleibt. Wenn eine enge Röhre ſchraubenförmig um die Spindel gewunden wäre, ſo würde nimmermehr das Waſſer darinn in die Höhe ſteigen, weil Luft und Waſſer in der engen Röhre einander nicht würden ausweichen können. Dies geſchieht in weiten Röhren. Wenn das Waſſer in der Röhre ſchon ſoweit geſtiegen iſt, daß es ſich beym fernern Umlauf der Spindel über dem Waſſerpaß desjenigen, woraus die Schraube ſchöpft, ſchon heben muß; ſo läuft es zwar weiter gegen die obere Mündung zu, aber nicht ſo, daß es bis an ſeine äußere Gränze den ganzen innern Raum der Röhre ausfüllt. Die vorderſte Fläche deſſelben iſt nicht auf der centriſchen Röhre ſenkrecht, ſondern horizontal, oder doch wenigſtens beynahe horizontal. Es fließt ſo vorwärts, wie es in einer Rinne vorwärts fließen würde, und macht über ſich der Luft Platz in die Röhre hineinzudringen. Auf ſolche Art ſöndert ſich von dem beym erſten Umlauf hineingetretenen Waſſer beym zweyten Umlauf ſoviel ab, als ohngefehr den waſſerhaltenden Bogen im zweyten Schraubengang füllet. Eine ſolche Abſönderung erfolgt bey jedem Umlauf, bis endlich das Waſſer zur obern Mündung ausläuft. Demnach iſt nie die ganze Schnecke voll Waſſer, ſondern von jedem Schraubengange nur ſoviel, als ohngefehr den waſſerhaltenden Bogen ausmacht, und die Zwiſchenräume ſind mit Luft angefüllt.

36. §.

Wenn ich nun dies alles erwäge, ſo dünkt mich, daß man immer mit der im Anfang dieſes Aufſatzes vorgetragenen auf die Geſetze des Gleichgewichts gebaueten Pitotſchen und bernoulliſchen Theorie von der Waſſerſchraube in der Ausübung zufrieden ſeyn könne. Wenn die Waſſerſchraube nur langſam umläuft, (und eine ſolche Einrichtung kann man der Maſchine nach Vorſchrift des 16. §. allemal geben) ſo denke ich, daß der Erfolg von dem Reſultat, was die erwehnte Theorie giebt, ſo ſehr nicht abweichen werde. Hierüber wären nun allerdings noch Verſuche zu wünſchen. Wenn ich Gelegenheit hätte, ſie anzuſtellen, ſo würde ich es auf beyde Arten verſuchen, ſowohl bey einer gänzlichen Tiefe dec Grundfläche unter Waſſer, wobey die untere Mündung beſtändig unter Waſſer bleibt, als auch bey einer ſolchen Tiefe der Grundfläche unter Waſſer, welche des H. Bernoulli Regel gemäß iſt. Ich würde hauptſächlich auf den Umſtand aufmerkſam ſeyn, ob nicht bey ſonſt unveränderter Anordnung der Schraube, und einerley Umlaufsgeſchwindigkeit, eine größere Waſſermenge bey Beobachtung der bernoulliſchen Regel gehoben würde. Es ſcheint ſehr natürlich zu ſeyn, daß nicht ſo viel Waſſer bey jedem Umlauf in einerley Zeit aus einem Schraubengange in den andern hinüber treten kann, wenn Luft und Waſſer einander ausweichen müſſen, als in dem Fall, wenn die Luft durch die untere Mündung eintreten kann. Die Erfahrungen, welche ich aus des Herrn Hennerts Preisſchrift oben im 31 und 32 §. ſchon angeführet

führet habe, ſind, wie es ſcheint, bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter dem Waſſer angeſtellt. Ich würde indeſſen zur Probe einige dieſer Erfahrungen mit des H. Bernoulli Theorie vergleichen, wenn mir nicht verſchiedene Zweifel entgegen ſtünden, ob auch wohl die im 31 §. angegebenen Zahlen für die Abmeſſungen der Schrauben alle richtig ſind. Es kann vieleicht ein unrichtiger Abdruck meine Zweifel veranlaſſen: es können auch andre Urſachen hie und da ein Verſehen bey der Angabe dieſer Abmeſſungen zuwege gebracht haben. Einmal ſcheinen die Zahlen 35, 37, 36 Zoll, wofern ſie wirklich die **Halbmeſſer** des Umfangs der Schraube bedeuten ſollen, ſehr groß zu ſeyn. Die **Durchmeſſer** hätten alſo auf 6 Fuß betragen, da doch Leupold im Theatro Machin. Hydraul. I Th. 72 §. 40 S. berichtet, daß man den größten Waſſerſchrauben in Holland nur 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer gebe. Das ſtatiſche Moment des Widerſtandes wird bey einem ſo groſſen Durchmeſſer ungemein groß, zumal da die hennertiſchen Schrauben drey Schraubengänge von ſehr beträchtlicher Weite gehabt haben. Ueberdem ſtimmen die erwähnten Zahlen auch nicht mit denjenigen überein, die Herr Hennert für die Winkel η, und die Entfernungen der Schraubengänge voneinander angiebt. Jene Winkel ſollen 11° 55′, 14° 42′, und 11° 54′, dieſe Entfernungen aber 23, 29, 24 Zoll betragen haben. Wenn aber a den Halbmeſſer, und e die Weite der Schraubengänge voneinander bedeutet, ſo wird $tang\ \eta = \frac{e}{2\pi a}$, alſo wäre für die erſte Schraube $tang\ \eta = \frac{23}{220} = 0,1045$, und $\eta = 5° 58'$. Nehme ich dagegen $2a = 35$ Zoll an, ſo wird $tang\ \eta = 0,2091$, und $\eta = 11° 49'$, welches doch mit Herrn Hennerts Zahl beynahe übereinkömmt. Ich würde alſo dafür halten, daß nur aus einem Verſehen rayons ſtatt diametres geſchrieben wäre:

allein alsdenn ſtimmen in der Tafel des 32 §. die ich dort aus der hennertiſchen Schrift mitgetheilet habe, die Winkelgeſchwindigkeiten, und die Werthe von $2\sqrt{gk}$, oder α, welche H. Hennert für gleichgültig annimmt, nicht überein: alſo ſcheint es, daß man durch die Zahlen 23, 29, 24 Zoll nicht die ganze, ſondern die halbe Entfernung der Schraubengänge voneinander verſtehen müſſe. Dies letztere ſcheint auch mit der Weite der Schraubengänge mehr überein zu kommen, deren drey um jede Schraube befindlich geweſen ſind, und deren viereckte Oefnungen 1, 36; 1, 46; und 1, 41 Quadrat-Fuß weit angegeben werden. Für ſo weite Gänge wäre kein Platz geweſen, wenn die ganze Höhe eines Schraubenganges ohngefehr 2 Fuß bis $2\frac{1}{2}$ Fuß betragen hätte: oder man müßte die angegebenen Zahlen für die Summe aller dreyer Oefnungen an jeder Schraube verſtehen. Wofern wirklich die Halbmeſſer der Schrauben 35, 37, 36 Zoll betragen haben, ſo muß ich vorausſetzen, daß H. Hennert von der Axe der Spindel bis an die Mitte der Oefnungen der viereckten Gänge gemeſſen habe, wenn die Zahlen zur Rechnung brauchbar ſeyn ſollen. Wäre dieſes geſchehen, ſo hätten die Schrauben bis an ihre äußere Gränze gemeſſen, mehr denn 7 Fuß im Durchmeſſer betragen, und dies iſt doch wirklich eine ſehr ungewöhnliche Weite. Bey dieſer Ungewißheit ſcheint mir eine nähere Vergleichung der angegebenen Effecte mit der bernoulliſchen Theorie ohne Nutzen zu ſeyn. Der eigentliche Bau der bey dieſen Erfahrungen gebrauchten Waſſerſchrauben müßte auch noch genauer beſchrieben ſeyn, wenn man die Rechnung mit einiger Zuverläßigkeit darauf anwenden wollte. Vorjetzt ſchließe ich dieſe Abhandlung mit dem Vorſatz, die Unterſuchung künftig wieder vorzunehmen, wenn ich andre meinem Wunſch gemäſſere Erfahrungen werde geſammelt haben.

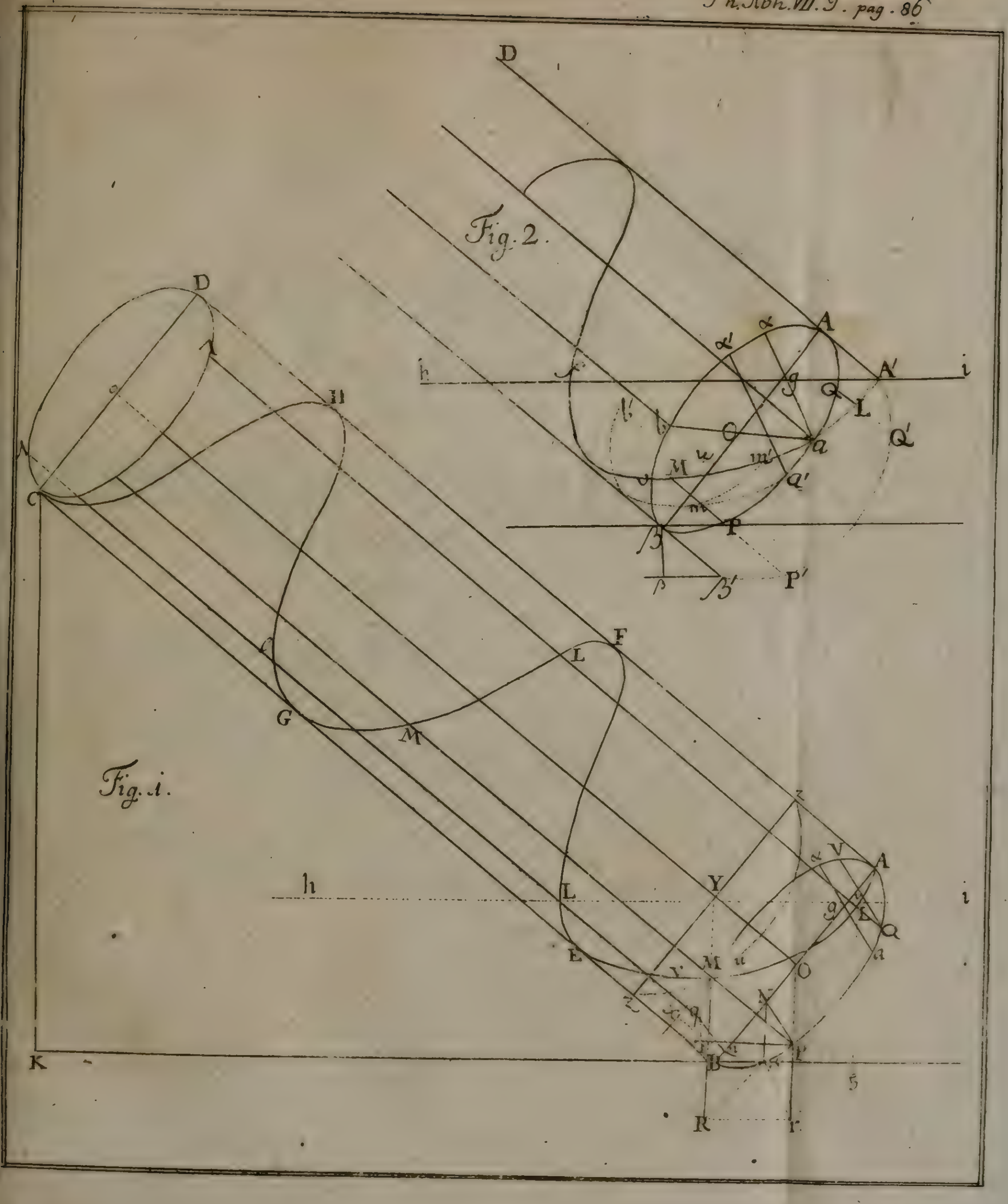

D
α
A
α'
h
f
g
A'
i
Q
L
b'
b
O
a
Q'
u
M
m'
o
Q'
m
β
P
β
β'
P'
D
I
o
H
C
C
F
L
G
M
z
V
A
α
h
L
Y
i
g
L
Q
E
M
u
O
a
Y
z
x
q
N
B
P
K
5
R
r

Fig. 2.

Fig. 1.

Abhandlung

die Verbeſſerung

des

Spießglas-Schwefels

betreffend,

entworfen

von

Wilhelm Heinrich Sebaſtian Buchholz,

der Arzneywiſſenſchaft Doctor, ordentlichem Arzte zu Weimar, Mitglied der kaiſerlichen Akademie der Naturforſcher, ingleichen der churfürſtlichen baieriſchen Akademie der Wiſſenſchaften, wie auch der königlich preußiſchen Geſellſchaft zum Nutzen der Wiſſenſchaften zu Frankfurt an der Oder Beyſitzer.

Daß reines und rohes Spießglas aus vielem Schwefel, und einer beträchtlich größern Quantität reguliniſcher metalliſcher Theile beſtehe, und daß, ſo überflüßig nun auch die ſchwefelichten Grundtheile in dem Spießglaſe ſind, die reguliniſchen jene doch ſehr übertreffen, wird hoffentlich jedem Scheidekünſtler zur Genüge bekannt ſeyn.

Da nun bekannt iſt, daß der Spießglasſchwefel von den erſten Niederſchlägen mehreres Brechen verurſacht, als der von den letztern Niederſchlägen, folglich ſehr ſelten oder gar nicht von vernünftigen Aerzten verſchrieben wird, auch von den Apothekern entweder weggeworfen, oder als etwas unnützes hingeſtellt, oder auch unter die Spießglasleber gemiſcht wird; ſo habe ich mir vorgenommen, dieſen groben Schwefel entweder zu verbeſſern, oder eine Art anzuzeigen, den Spießglasſchwefel vom erſtern Niederſchlage gleich ſo gut zu erhalten, als wenn er vom 4ten oder 5ten Niederſchlage wäre.

Will man den groben Spießglasſchwefel dem von den letztern Niederſchlägen in ſeinem Weſen und Wirkung gleich machen, ſo iſt zu unterſuchen nothwendig, worinnen dieſe beyden Sorten von einander abgehen. Auf den Unterſchied der Farbe will ich jetzo keinen Betracht nehmen, ſondern nur bey ihrer unterſchiedenen Wirkung ſtehen bleiben. Hier findet ſich nun, daß der erſtere die Eigenſchaft brechen zu erregen, am ſtärkſten, der mittlere dieſelbe in einem geringern, und der letzte, dieſe Eigenſchaft in einem noch geringern Grade beſitze, und dagegen mehr ſchweistreibend und reſolvirend ſey. Um welcher Beſchaffenheit willen auch eben dieſer letztere von den Aerzten verlangt wird.

Nun iſt es eine ausgemachte Wahrheit, daß alle brechenmachende Eigenſchaft des Spießglaskönigs, blos in der Verbindung des phlogiſtons mit der antimonialiſchen Grunderde, und ſo lange dieſe Verbindung nicht zerſtöret wird, lediglich und allein beſtehe. Was hierbey pars arſenicalis ſey, den ſo viele und beſonders Neumann in ſeinen prælection. chemic. p. 11. pag. m. 287. der Keſſeliſchen Ausgabe Züllichau 1749. anklagen, habe ich noch niemals mit aller meiner angewandten Aufmerkſamkeit begreifen können, denn reines Spießglas iſt vom Arſenik darinn unterſchieden, daß es

1) nicht den geringſten Geruch von Knoblauch hat, welcher dem Arſenik, wenn er verbrannt wird, eigen iſt.

2) Läßt ſich der Spießglaskönig ganz und gar nicht im Waſſer, wie Arſenik, noch in oleo tartari per deliquium auflöſen, worinne doch der weiſſe Arſenik faſt ganz aufgelöſt wird.

3) Haben die Beſtandtheile des Arſeniks und Spießglaſes ganz unterſchiedene Figuren, denn die erſtern ſind piramidaliſch, und die letztern ſind den Nadeln gleich, und dieſes beſonders in den allerkleinſten Theilchen.

Ja ſogar wenn man das Spießglas aus den verſchiedenen Bereitungen des Spießglaſes wieder reducirt, ſo nimmt es die ſpitzige oder nadelförmige Geſtalt wieder an.

Ferner iſt unläugbar, daß das Spießglas in ſehr verſchiedenen, und beſonders nach denjenigen Graden, wornach man ihm etwas von ſeinem Schwefel entziehet, und wodurch das übergebliebene immer mehr metallartig wird, in ſeiner brechenmachenden Wirkung geſtärket werden kann. Daraus alſo ſehr deulich ſich ergiebt, daß dieſe Wirkung den reguliniſchen Theilen eigen iſt.

Zu dieſen vorgetragenen Grundſätzen gehört auch noch dieſer, daß der wahre Schwefel im Spießglaſe an und vor ſich betrachtet, von dem gemeinen Schwefel in keinem Stück unterſchieden ſey.

Wenn man nun alſo an dem Spießglasſchwefel nach den verſchiedenen Niederſchlägen, verſchiedene Wirkungen wahrnimmt, ſo fließt meiner Meinung nach daraus, daß ein Spießglasſchwefel von dem erſten Niederſchlage, von einem andern des letztern Niederſchlags nur durch die Proportion des mit verbundenen wahren Schwefels mit den reguliniſchen Theilen unterſchieden ſey, von welchem Schwefel alſo nach der Wirkung, und nach obigen Sätzen der erſte Niederſchlag weniger als der letzte beſitze; daher iſt ja die Folge ſonnenklar, daß wenn ich dem Spießglasſchwefel vom erſtern Niederſchlage ſo viel Schwefel zuſetze, daß zwiſchen dieſem und den reguliniſchen Theilen eben die Verhältniß herauskömmt, wie bey dem Spießglasſchwefel vom letztern Niederſchlage, daß dieſer eben die helle Farbe, und die weit gelindere Wirkung bekommen müßte: und dieſer Satz beſtättigt ſich auch durch die Erfahrung. Denn da jener Theil wahrer Schwefel iſt, ſo beym letztern Niederſchlage ſtecket, und vor dem gemeinen nichts voraus hat, ſo kann es auch keinen Unterſchied machen, wenn ich dem erſtern, um ihn mit jenem in gleiche Proportion ſeiner Theile zu ſetzen, nur gemeinen Schwefel beyſetze. Daß der Schwefel ſowohl merkurialiſche als antimonialiſche Subſtanzen verbeſſert, beweiſet auch dasjenige, was die Verfaſſer des New Diſpenſatory London 1763. pag. 86. ſagen: Sulphur, which reſtrains the power of mercury and the antimonial Semimetal, remarkably abates the virulence of this poiſonous mineral alſo. Such of theſe ſubſtances as participate more largely of Sulphur, Seern to be almoſt innocent.

Ehe ich auf dieſe Grundſätze fiel, ſo glaubte ich durch den naſſen Weg eine Scheidung der groben reguliniſchen Theile von den ſchwefelichten vermittels der alcaliſch-cauſtiſchen Salze zu bewerkſtelligen. Ich nahm derowegen eine Unze groben Spießglasſchwefels d. i. vom erſten und zweyten Niederſchlage, kochte ſolchen in einem irrdenen Gefäße mit einem Maas oder zwey Pfund Kalchwaſſer, welches mit 2. Quintel vom gefloſſenen Weinſteinöle geſchärft war, bis über die Hälfte ein. Der Schwefel ſchien faſt aufgelöſet, die Auflöſung war citronenfärbig. Nach dem Durchſeigen durch Fließpapier, ſchlug ich den Schwefel durch deſtillirten Eſſig nieder, und erhielt nicht mehr als anderthalb Quintel eines ſchönen verbeſſerten Schwefels.

Dieſer Verſuch war nicht der vortheilhafteſte, er führte mich aber auf den Gedanken, ob nicht ein ſtärker cauſtiſches Salz noch mehr vom Schwefel auflöſen würde.

Ich nahm daher ungelöſchten Kalch und gute Pottaſche zu gleichen Theilen, vermiſchte beydes, und ließ das Mengſel in ſtarkem Feuer wohl fließen, ſchüttete es aus, und, nachdem es gepulvert, kalt Waſſer darüber, woraus eine ſehr geſättigte cauſtiſche Lauge entſtund. Eine Unze vom groben Spießglasſchwefel kochte ich ohngefehr 2. Stunden in dieſer cauſtiſchen Lauge, die Auflöſung verlohr ihre röthlichbraune Farbe, und wurde, nachdem es durchgeſeigt, milchfarbe. Dem Anſehen nach war hierinnen wenig Schwefel enthalten; allein da es mit deſtillirtem Eſſig niedergeſchlagen wurde, ſo zeigte ſich eine ſchöne Pomeranzenfarbe, und ich erhielt 2. Quintel eines lockern Schwefels, welcher ungleich feiner ausfiel, als der im Filtro zurück gebliebene.

Ferner nahm ich eine Unze groben Spießglasſchwefel, kochte ſolchen mit ziemlich geſättigter Seiffenſiederlauge, wozu ich währendem Kochen öfters friſche ſchüttete, um dadurch das cauſtiſche dieſer Lauge zu concentriren. Ich verfuhr damit wie im vorigen Verſuche, und erhielt einen Schwefel, der die erſtern alle an Feinheit und heller Pomeranzenfarbe übertraf. Nur war dieſer ſchöne Schwefel zu koſtbar, denn ich erhielt nicht mehr durch den Niederſchlag als Fiv.

Da nun bey dieſen jetzt erzählten Verſuchen die Quantität des erhaltenen feinen Schwefels zu gering war, ſo nahm ich nach obigen erzählten Grundſätzen verſchiedene Verſuche vor, welche meiner Muthmaſſung, wie der Erfolg gewieſen, nicht widerſprachen.

Eine Unze groben Spießglasſchwefel, und ein Loth gemeinen Schwefel vermiſchte ich miteinander, ſetzte einen Schmelztiegel in das Feuer, und ließ darinn zwey Unzen Pottaſche flieſſen, trug das Gemiſche vom Schwefel löffelweiſe dazu, welches im Schmelzen ſtark nach Schwefel roch. Nachdem alles eingetragen, und die Miſchung eine Viertelſtunde gefloſſen, goß ich es aus, und verfuhr damit, wie bey der Bereitung eines jeden andern Spießglasſchwefels. Im Filtro blieb ein dunkles ſchwarzbraunes Magma zurück. Die Lauge wurde mit deſtillirtem Eſſig niedergeſchlagen, da denn ein lockerer Schwefel zu Boden fiel. Aber auch mit dieſer erhaltenen Quantität Schwefel war ich nicht zufrieden.

Der Verſuch wurde wiederhollt, weil ich glaubte, daß, da ich das Gemiſche zu lange nämlich $\frac{1}{4}$ Stunde lang im Feuer gehalten, zu viel vom Schwefel verbrannt ſeyn würde. Nachdem die Maße alle eingetragen, und einige Minuten zuſammen im Fluſſe geſtanden, nahm ich ſolche mit einem Spatel aus dem Schmelztiegel, pulveriſirte es, und verfuhr wie bey nur gedachtem Proceß. Ich erhielt dadurch zwar eine etwas beträchtlichere Menge lockern Schwefel, aber an hellgelber Farbe, Leichtigkeit und dergleichen kam er dem erſtern bey weitem nicht gleich.

Die Urſache, warum in nur gedachtem Verſuche der Schwefel nicht recht gerathen war, lag meiner Meinung nach darinn, daß die Wirkung der Pottaſche auf den gemeinen zugeſetzten Schwefel nicht hinlänglich geweſen, folglich nur etwas vom groben Spießglasſchwefel angegriffen und aufgelöſet habe. Derowegen nahm ich von allen 3. Cörpern, wie ich im erſten Verſuche von dieſer Art beſchrieben, eben das Gericht, trug es in einen Schmelztiegel, und ließ es etwas länger fließen. Unglücklicher Weiſe aber durchbohrte die Maße den Tiegel, und war eine beträchtliche Menge durchgedrungen, ehe ich es gewahr wurde.

Da mir aus der Erfahrung bekannt war, daß die Beſtandtheile einer ordentlichen Schwefelleber, nämlich reine Pottaſche und Schwefel, in einen glühenden Tiegel getragen, ſehr geſchwind flieſſen, ohne daß vieles vom Phlogiſto des Schwefels verbrenn; ſo nahm ich derohalben 4 Unzen vom groben Spießglasſchwefel, 2 Unzen vom gemeinen Schwefel, und $\frac{1}{2}$ ℔. Pottaſche, miſchte alles gepulvert unter einander, und trug es in einen glühenden Schmelztiegel unter beſtändigen Umrühren. Nachdem es alles hineingetragen war, und recht roth glühete, ſo goß ich es aus. Nach dem Erkalten hatte ich eine rothbraune Maße, welche gepulvert ich in 5 Maas Waſſer gelinde in einem eiſernen Topfe ſo lange kochte, bis ein Maas verkocht war, dann durch ein Filtrum ſeigte. Die durchgeſeigte Flüßigkeit war wie Molken anzuſehen. Nach dem Erkalten tröpfelte ich deſtillirten Eſſig dazu, und wurde mit Vergnügen gewahr, daß eine unglaubliche Menge des ſchönſten blaß pomeranzenfarbigten Schwefels niederfiel. Wieviel ich eigentlich in dieſem Verſuche feinen Schwefel erhalten, kann ich nicht beſtimmen, weil etwas vom Filtro verſchüttet worden.

Mit dieſem Verſuche nun war ich vollkommen zufrieden, da derſelbe mit meiner Theorie und Wünſchen vollkommen übereinkam. Nunmehr können diejenigen Apotheker, welche eine große Menge vom groben Spießglasſchwefel vorräthig haben, getroſt ihren Schwefel auf nur beſchriebene Art verbeſſern.

Nun kam es darauf an, wie die zeitherige in den Apotheken übliche Methode, den Spießglasſchwefel aus rohem Spießglas, Weinſtein und Salpeter durch das Verpuffen zu verfertigen, verbeſſert werden könnte, welche als unvollkommen mit Recht genennet werden kann, weil dadurch eine Menge grober Schwefel erhalten wird, welchen niemand gebrauchen kann.

Vier Unzen Pottaſche ließ ich im Feuer fließen, und trug ſodann 2 Unzen rohes gepulvertes Spießglas dazu, welches mit einer Unze Schwefel vermiſcht war, da alles hinlänglich floß, wurde es ausgegoſſen, mit Waſſer gekocht, durchgeſeigt, welches durchgeſeigte ein ſehr dunkelbraunes Anſehen hatte. Das Ueberbleibſel im Filtro war ſehr wenig, woraus ich ſchon im voraus muthmaſſete, es würde bey dieſer Operation vieler grober Schwefel niederfallen. Zu der durchgeſeigten Flüßigkeit tröpfelte ich die gehörige Quantität deſtillirten Weineſſig, und wie ich vermuthet hatte, fiel der Schwefel ſehr dunkelbraun nieder. Auch die Menge war der Quantität des Spießglaſes nicht gemäß, weshalben ich alles zuſammen wegſchüttete.

Der Verſuch wurde alſo wie bey dem letzten mit dem Spießglasſchwefel angeſtellten mit dem rohen Spießglaſe wiederholt.

Ich nahm 1 ℔. rohes Spießglas ½ ℔. gemeinen Schwefel und 2 ℔. reine Pottaſche, miſchete dieſe Dinge gepulvert unter einander, und ließ es in einen Tiegel fließen. Goß es denn aus, und kochte es mit Waſſer gehöriger maſſen, dann wurde es nach dem Durchſeigen mit deſtillirtem Weineſſig niedergeſchlagen. Hier bekam ich nun vom groben braunen Schwefel nicht das mindeſte zu ſehen, ſondern es ſchlug ſich das erſte wie das letzte mit einer hellgelben Pomeranzenfarbe nieder, und zwar zu meinem größten Vergnügen.

Dieſer letztere Schwefel war demjenigen von der 4ten Niederſchlagung auf dem gewöhnlichen Weg bereitet, in ſeinen Wirkungen auf den menſchlichen Körper vollkommen
gleich.

* * *

Abhandlung
über die
Theorie
der
Saugwerke.

von

Wenceſl. Joh. Guſtav Karſten.

1768.

Theorie der Saugwerke.

1. §.

Es ſind zweyerley Umſtände in Betrachtung zu ziehen, wenn ein Saugwerk ſo vortheilhaft eingerichtet werden ſoll, als es in ſeiner Art ſeyn kann. Einmal wird erfordert, daß das Waſſer in der Saugröhre nicht etwa in einer gewiſſen Höhe, der fernern Bewegung des Kolbens ungeachtet, hängen bleibe, ſondern wirklich nach einigen Kolbenzügen bis in den Stiefel, und endlich bis zur größten Höhe des Kolbens hinauf ſteige. Fürs zweyte muß das Saugwerk hiernächſt ohne Zeitverluſt bey jedem Kolbenhub ſoviel Waſſer geben, als der ganze Raum des Kolbenzuges im Stiefel faſſen kann. Um dieſe beyden Stücke mit der gehörigen Deutlichkeit zu unterſcheiden, muß man ſich vorſtellen, daß anfangs noch die ganze Saugröhre ledig ſey, und das Waſſer in derſelben nur ſo hoch ſtehe, als in demjenigen Behälter, aus welchem es das Saugwerk herauf ziehen ſoll. Beym erſten Kolbenzuge wird nun das Waſſer in der Saugröhre auf eine gewiſſe Höhe ſteigen: beym zweyten Kolbenzuge etwas höher: beym dritten Kolbenzuge wiederum etwas höher, und ſo ferner. Wenn ſich die Einrichtung ſo machen ließe, daß der Kolben in ſeinem niedrigſten Stande an den Boden des Stiefels, und das daſelbſt befindliche Ventil genau anſchlöſſe; ſo würde das Waſſer allemal bis in den Stiefel treten, und bis zur höchſten Stelle des Kolbens gehoben werden, dafern anders die größte Kolbenhöhe über die Oberfläche des Waſſers, welches das Saugwerk heraufziehen ſoll, nicht über 32. rheiniſche Fuß beträgt. In allen andern Fällen, wo zwiſchen dem Kolben in ſeinem niedrigſten Stande, und dem Boden des Stiefels ein Zwiſchenraum bleibt, wird die in demſelben zurück bleibende Luft dem in der Saugröhre hinauf ſteigenden Waſſer deſto mehr hinderlich ſeyn, je gröſſer dieſer Zwiſchenraum iſt. Er heißt deswegen **der ſchädliche Raum**, und das Saugwerk iſt deſto vollkommener, je kleiner dieſer ſchädliche Raum iſt. Wenn man das Pumpenventil nicht im Boden des Stiefels, ſondern irgendwo in der Saugröhre anbringen wollte, ſo würde man hiedurch den ſchädlichen Raum vergröſſern, und dies deſtomehr, je niedriger das Ventil in der Saugröhre angebracht würde. Die allerunvollkommenſte Pumpe würde alſo diejenige ſeyn, welche ihr Ventil nicht am oberſten, ſondern am unterſten Ende der Saugröhre hätte. Man kann demnach alle Arten von Saugwerken in folgende drey Claſſen bringen. Eine **Pumpe der vollkommenſten Art** hat ihr Ventil oben an der Saugröhre, und gar keinen ſchädlichen Raum. Eine **Pumpe der unvollkommenſten Art** hat ihr Ventil unten an der Saugröhre. Eine **Pumpe von mittlerer Art** hat zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre, aber zwiſchen dem Kolben und dem unten im Stiefel befindlichen Ventil einen ſchädlichen Raum. **Belidor** hat in der Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 913. §. ebenfalls dieſe drey Arten der Saugwerke von einander unterſchieden.

2. §.

Dieſe Betrachtungen betreffen inzwiſchen nur noch die nöthige Vollkommenheit des Saugwerks in Anſehung des erſten vorhin erwähnten Umſtandes, nämlich in Anſehung der anfänglichen Bewegung des Waſſers in der Saugröhre, bevor es den Kolben im Stiefel erreicht. Sobald es bis an denſelben gelangt iſt, wird es ihm hiernächſt beſtändig folgen, und die Atmoſphäre kann es bis zur größten Kolbenhöhe hinauf treiben, wenn dieſe nicht über 32 rheiniſche Fuß beträgt. Geſchieht dies wirklich bey jedem Kolbenzuge, ſo wird die Pumpe bey jedem Hub ſoviel Waſſer geben, als den körperlichen Raum des Kolbenzuges ausfüllen kann. Allein man ſiehet wohl, daß eine gewiſſe Zeit nöthig ſey, bevor das Waſſer vom niedrigſten bis zum höchſten Kolbenſtande hinauf ſteigen kann. Wofern der Kolben von ſeiner niedrigſten Stelle bis zur höchſten in jedem Augenblick mit eben derſelben Geſchwindigkeit ſtiege, womit das Waſſer im Stiefel hinauf ſteigt; ſo würde das Waſſer demſelben beſtändig unmittelbar nachfolgen, ohne daß zwiſchen beyden ein leerer Zwiſchenraum bliebe. Falls aber der Kolben ſchneller ſtiege, als das Waſſer folgen kann, ſo würde zwiſchen beyden ein leerer Raum bleiben, und in dem Augenblick, da der Kolben in ſeiner höchſten Stelle ſchon wieder umkehret, würde der Raum des Kolbenzuges noch nicht mit Waſſer angefüllet ſeyn: alſo würde auch nicht auf jeden Kolbenzug ſoviel Waſſer gehoben werden, als die Vollkommenheit des Saugwerks erfordert. Stiege der Kolben nicht ſo geſchwinde, als das Waſſer für ſich ſteigen kann; ſo würde zwar jeder Kolbenhub ſoviel Waſſer geben, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann: allein es würde mehr Zeit darüber hingehen, als nöthig wäre, wenn der Pumpenkolben mit dem Waſſer gleich ſchnell ſtiege. Nun iſt leicht abzuſehen, daß das Waſſer nicht beſtändig mit gleicher

Geſchwindigkeit ſteigen werde, und die folgenden Unterſuchungen werden ergeben, daß es mit beſchleunigter Bewegung bis zum höchſten Kolbenſtande ſteige, dafern der Kolben es nicht aufhält. Vermittels der gewöhnlichen mechaniſchen Einrichtungen aber, welche den Kolben zu bewegen dienen, läßt ſich demſelben nicht wohl eine andre, als gleichförmige Bewegung mittheilen. Deßwegen muß die Einrichtung ſo gemacht werden, daß der Kolben in eben der Zeit die Höhe des Kolbenzuges durchlaufe, worinn das Waſſer im Stiefel um eben dieſe Höhe ſteigt. Zwar wird alsdenn beym erſten Anfang der Bewegung des Kolbens zwiſchen demſelben und dem Waſſer ein leerer Raum entſtehen, weil nun der Kolben anfangs ſchneller, als das Waſſer ſteigt. Allein in dem Augenblick, da der Kolben ſeine höchſte Stelle erreicht, wird das Waſſer den Kolben eingeholet haben, und der ganze Raum des Kolbenzuges mit Waſſer angefüllet ſeyn. Dieſe Betrachtungen ergeben, daß es bey gegenwärtiger Unterſuchung über die Geſchwindigkeit, womit der Kolben bewegt werden muß, vornehmlich darauf ankommen werde, zu wiſſen, mit welcher Geſchwindigkeit das Waſſer in jedem Augenblick in dem Stiefel hinauf ſteigen würde, wenn es ſich ſelbſt frey überlaſſen in dem luftleeren Raum des Stiefels hinauf ſtiege, ohne durch den Kolben im geringſten gehindert zu werden. Die Unterſuchung ſowohl hierüber, als auch die im 1 §. erwähnte ſollen nun nacheinander folgen.

Unterſuchung

über die anfängliche Bewegung des Waſſers in der Saugröhre, und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht.

3. §.

Die Abmeſſungen des Stiefels (1. Fig.) und der Saugröhre einer Pumpe der vollkommenſten Art (1 §.) ſind gegeben, nebſt der Höhe des Stiefel Ventils B über den Waſſerpaß YZ, und der Höhe AB des Kolbenhubs: man fragt, wie hoch das Waſſer nach dem erſten Kolbenhub in die Saugröhre hinein treten wird.

Aufl. Es ſey die Höhe BZ des Stiefelventils über den Waſſerpaß $= b$, ſo iſt hier zugleich b die kleinſte Höhe des Kolbens, oder die Höhe der Saugröhre, ſo weit ſie über dem Waſſerpaß YZ hervorraget. Ferner ſey die Höhe des Kolbenhubs $AB = c$, die größte Höhe des Kolbens $AZ = a$, ſo iſt $a = b + c$. Jeder Querſchnitt des Stiefels ſey $= m$, und jeder Querſchnitt der Saugröhre $= n$; ſo iſt der Innhalt der Saugröhre $= nb$ (ſo weit ſie nämlich über dem Waſſer YZ hervorragt, welches hier allemal verſtanden wird) und dieſen Raum füllt die natürliche Luft aus, bevor der Kolben das erſtemal zu ſteigen anfängt. Der Innhalt des Stiefels bis an die höchſte Stelle A, ſo die Grundfläche des Kolbens erreicht, iſt $= mc$. Wenn alſo das Waſſer in der Saugröhre während des erſten Kolbenzuges um die Höhe $ZX = x$ ſteigt; ſo füllt die nach dem erſten Zug noch übrige innere Luft den Raum $AB + BZ - ZX = mc + n(b - x)$ aus. Die Federkraft der in dieſem Raum nunmehr ausgebreiteten Luft ſey $= h'$, und die natürliche Federkraft der Atmoſphäre $= h$, ſo daß durch jeden dieſer Buchſtaben die Höhe einer Waſſerſäule verſtanden wird, der die Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält: ſo hat man $h' = \frac{n b h}{m c + n (b - x)}$, und $h = h' + x$, alſo $x = h - \frac{n b h}{m c + n (b - x)}$. Hieraus folgt $n x - (m e + n b + n h) x = - m c h$, und $X = \frac{1}{2} (\frac{m}{n} c + b + h) \pm \sqrt{} (\frac{1}{4} (\frac{mc}{n} + b + h^2) - \frac{m c h}{n})$.

Dafern Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind, alſo $m = n$ iſt, ſo hat man $x = \frac{1}{2} (a + h) \pm \sqrt{} (\frac{1}{4} (a + h^2 - c h)$, weil $b + c = a$ iſt. Man kann dieſe Gleichung als eine allgemeine Formul betrachten, die ſich auf alle Fälle, auch wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit ſind, anwenden läßt, wenn man durch C nicht die wirkliche Höhe des Kolbenzuges verſteht, ſondern die ſogenannte auf die Mündung der Saugröhre reducirte Höhe deſſelben. Wenn nämlich ſtatt des Stiefels, deſſen Querſchnitt $= m$ iſt, ein andrer gebraucht würde, der eben ſo weit als die Saugröhre wäre, ſo müßte der Kolben um die Höhe $\frac{m c}{n}$ gehoben werden, wenn bey jedem Zuge eben ſoviel Luft aus der Saugröhre in den Stiefel treten ſollte, als in dem vorigen Fall. Man iſt gewohnt, ſtatt des gegebenen Saugwerks das reducirte zu betrachten, und man nimmt alsdenn an, wenn beyde Saugröhren gleich hoch ſind, daß das Waſſer in dem reducirten Saugwerk eben ſo ſteige, wie in dem natürlichen, und wendet deßwegen die Rechnungen bloß auf das reducirte Saugwerk an. Dieſe Vorausſetzung hat, wie man leicht ſiehet, ihre Richtigkeit, ſo lange das Waſſer die Höhe der Saugröhre noch nicht überſtiegen hat. Sobald dies letztere erfolgt iſt, leidet ſie ihre Einſchränkungen, wie die folgenden Unterſuchungen ergeben werden.

4. §.

Dafern während des zweyten Kolbenzuges das Waſſer von Z bis W ſteigt, ſo läßt ſich auf eben die Art XW = Y finden. Was vorhin $b - x$ war, ſey jetzt $= \beta$, und die Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Zuge $= h''$; ſo iſt $mc + n(\beta - y) : n\beta = h' : h''$, und $h'' = h' - y$, folglich wird $y = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2\right) - \frac{mch'}{n}\right)}$. Man wird leicht abnehmen, daß bey der wirklichen Berechnung der Werthe von X und Y vor der Wurzelgröße das Zeichen (—) genommen werden müſſe, weil das Waſſer ſtehen bleiben wird, wenn es die niedrigſte von den beyden Höhen erreicht hat, die der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man ZW $= x + y = z$, ſo wird $\beta - y = b - z$, und $h'' = h - z$, alſo $mc + n(b - z) : n\beta = h' : h - z$, woraus $(mc + n(b - z)(h - z) = n\beta h'$ folgt, alſo $z = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \frac{mch}{n} - (6h - \beta h)\right)}$ oder $z = \frac{1}{2}(a + h) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(a + h^2) - ch - (bh - \beta h')\right)}$, wenn $m = n$ iſt.

Es ſey $a = 16$ Fuß und $b = 12$ Fuß, alſo $c = 4$ Fuß, und $h = 32$ Fuß, $m = n$; ſo wird $x = 2,834$, und $z = 5,798$. Muſchenbroeck hat dies Exempel in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2124. und er bringt für den erſten Kolbenzug eben die Höhe x heraus: allein die folgenden Kolbenzüge findet er nicht ſo, wie ſie nach gegenwärtiger Rechnung heraus kommen. Die für x gefundene Gleichung läßt ſich, wenn $m = n$ iſt, ſo ausdrücken: $\frac{b}{a - x} + \frac{x}{h} = 1$, und eben den Ausdruck hat Muſchenbroeck. Hieraus ſchließt er, man finde die Gleichung für z, wenn in jener z ſtatt x, und β ſtatt b geſetzt werde. Dies giebt $\frac{\beta}{a-z} + \frac{z}{h} = 1$. Allein hiebey hat Muſchenbroeck ohne Zweifel eine Pumpe der unvollkommenſten Art in Gedanken gehabt, ob es gleich ſcheint, daß er die Pumpe der vollkommenſten Art verſtehe, auch ſeine Zeichnung grade dieſe letztere, oder doch wenigſtens die mittlere Art vorſtellig macht. Es wäre dies ſonſt keinesweges eine richtige Anwendung der für x gefundenen Gleichung. Wenn man dieſe Gleichung ſo ausdrückt, $\frac{bh}{a-x} = h - x$: ſo ſiehet man deutlicher, wie ſie verändert werden muß, wenn z ſtatt x geſetzt wird. Es iſt nämlich $\frac{bh}{a-x}$ die Federkraft der in dem Raum $a-x$ ausgebreiteten Luft, deren Federkraft, da ſie noch den Raum b füllte, $= h$ war; überdem iſt $h-x$ der Druck, womit die äußere Atmoſphäre die Waſſerſäule x aufwärts preßt, und beyde müſſen gleich ſeyn. Nun aber iſt beym Anfang des zweyten Kolbenzuges die in dem Raum β eingeſchloſſene Luft nicht $= h$, ſondern $= h'$, und der Druck, womit die Atmoſphäre die Waſſerſäule z aufwärts preßt, iſt $= h - z$. Daher wird $\frac{\beta h'}{a-z} = h - z$, welches die vorhin für x gefundene Gleichung iſt, wenn man $m = n$ ſetzt. Uebrigens iſt die Gleichung $Y = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'\right) - \surd\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2\right) - \frac{mch'}{n}\right)$ am bequemſten, wenn man berechnen will, um wieviel das Waſſer bey jedem folgenden Kolbenzug ſteige. Wenn nämlich jedesmal durch β die Höhe des in der Saugröhre noch mit Luft gefüllten Raums, und durch h' die Dichtigkeit dieſer Luft verſtanden wird, ſo iſt y dasjenige Stück, um welches beym folgenden Kolbenzuge die Höhe des Waſſers in der Saugröhre zunimmt. Das vorige Exempel giebt folgende Reſultate.

Anzahl der Kolbenzüge.	Der Werth von y	Höhe des Waſſers in der Saugröhre.
1	2, 838	2, 834
2	2, 964	5, 798
3	3, 152	8, 950
4	3, 462	12, 412

Daraus ergiebt ſich, daß das Waſſer nach dem vierten Kolbenzuge ſchon in den Stiefel hinein trete. Alſo wird es der fünfte Kolbenzug ſchon bis an die höchſte Stelle heben können, die der Kolben erreicht: und wenn die Gußröhre nahe über dieſe Stelle angebracht iſt; ſo wird es beym ſechſten Kolbenzuge ſchon zur Gußröhre heraus laufen.

5. §.

Dieſe Rechnung ſetzte voraus, daß Stiefel und Saugröhre von gleicher Weite ſind. Allein die gebrauchte Gleichung findet, wie ſchon erinnert worden, nur ſo lange ihre Anwendung, als die Höhe des heraufſteigenden Waſſers die Höhe der Saugröhre nicht übertrift, wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit ſind. Dies ergiebt ſich ſogleich, wenn man auf die zum Grunde liegende Proportion $mc + n(b - x) : nb = h : h - x$ zurück gehet. Das erſte Glied drückt den Raum aus, den die Luft ausfüllt, in dem Augenblick, da der Kolben das erſtemal ſeine höchſte Stelle erreicht hat: aber in der Vorausſetzung, daß das Waſſer nur bis an X (1. Fig.) in der Saugröhre geſtiegen ſey. Wäre es, wie in der zweyten Figur bis an X in den Stiefel geſtiegen, ſo wäre der Raum, den die verdünnte Luft einnimmt, $= mc - m . BX$. Wenn demnach nun $BX = u$ geſetzt wird, ſo erhält man $m(c - u) : nb = h : h - b - u$, alſo wird $m(c - u)(h - b - u) = nbh$. Weil nun $b + u$ das iſt, was vorhin x

hieß, ſo hat man auch $(a-x)(h-x)=\frac{nbh}{m}$, und dies giebt $x^2-(a+h)x=\frac{nbh}{m}-ah$, woraus nun $x=\frac{1}{2}(a+h)-\surd(\frac{1}{4}(a+h^2)-(a-\frac{nb}{m})h)$ folgt. Wenn $m=n$ iſt, ſo kömmt dieſe Gleichung mit der vorigen überein, wie erfordert wird. Man wendet dieſe Rechnung leicht auf den Fall an, wenn dies nicht der erſte Kolbenzug, ſondern einer der folgenden iſt, wobey das Waſſer in den Stiefel tritt. War die Höhe des Waſſers in der Saugröhre $=x$, die Höhe ihres noch ledigen Theils $b-x=\beta$, die Dichtigkeit oder Federkraft der darinn eingeſchloſſenen Luft $=h'$; ſo hat man $m(c-u):n\beta=h':h-b-u$, oder $(a-x)(h-x)=\frac{n\beta h'}{m}$, woraus $x=\frac{1}{2}(a+h)-\surd(\frac{1}{4}(a+h^2)-ah-\frac{nb}{m}h')$ folgt.

6. §.

Die Abmeſſungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der unvollkommenſten Art ſind gegeben, nebſt der Höhe des Kolbenzuges: man fragt, wie hoch das Waſſer nach dem erſten ſowohl, als den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Beym erſten Kolbenzuge tritt das Waſſer auf einerley Höhe, es mag das Ventil oben oder unten an der Saugröhre angebracht ſeyn, und die Pumpe zur vollkommenſten oder unvollkommenſten Art gehören, dafern anders alle Abmeſſungen beyder Arten einerley ſind. Es iſt nämlich in beyden Fällen anfangs die ganze Saugröhre mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet, die alſo den Raum nb einnimmt. Steigt nun beym erſten Kolbenzuge das Waſſer auf die Höhe (1. Fig.) $ZX = x$, ſo wird die Luft in den Raum $mc + n\,(b - x)$ ausgebreitet, ſo daß ihre Federkraft $= \frac{nb}{mc + n\,(b - x)} . h$ wird, und dieſe muß $= h - x$ ſeyn, wie im 3 §. Beym zweyten und den folgenden Kolbenzügen aber ſind beyde erwähnte Fälle gar ſehr verſchieden. Indem nämlich der Kolben wieder bis zur niedrigſten Stelle herab ſteigt, drückt er die Luft bis auf ihre natürliche Dichtigkeit zuſammen, und ſoviel, als vorhin den Raum nx ausfüllte, tritt nur durch das Kolbenventil hinaus. Die übrige bleibt in dem Raum $BX = n\,(b - x) = n\beta$ eingeſchloſſen, und dieſe behält ihre natürliche Dichtigkeit, ſtatt deſſen, daß bey der Pumpe der vollkommenſten Art die in dieſem Raum zurück bleibende Luft nur die Federkraft $\frac{nb}{mc + n\,(b - x)}, h = h'$ behält. Wenn nun beym zweyten Kolbenzuge das Waſſer bis W ſteigt, und $ZW = z$ iſt; ſo breitet ſich die in dem Raum $n\beta$ vorhin zurück gebliebene natürliche Luft in den Raum $mc + n\,(b - z)$ aus, und ihre Federkraft wird $= \frac{n\beta h}{mc + n\,(b - z)}$, die nun $= h - z$ ſeyn muß, ſo daß man die Gleichung $\frac{n\beta h}{mc + n\,(b - z)} = h - z$ erhält. Bey der vollkommenſten Art der Pumpe hätte man $\frac{n\beta h'}{mc + n(b - z)} = h - z$; wie im 4. §. Im gegenwärtigen Falle alſo wird $z - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \surd \left(\frac{1}{4} \left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \left(\frac{mc}{n} + b - \beta\right) h\right)$, und man darf in der für den erſten Kolbenzug gefundenen Gleichung nur z ſtatt x und β ſtatt b ſchreiben, wenn man $\frac{mc}{v} + b = a$ ſetzt.

Wenn man hiemit dasjenige verbindet, was im 4 §. in Abſicht der Muſchenbroeckiſchen Rechnung für die Höhen, worauf das Waſſer bey wiederholten Kolbenzügen ſteigt, iſt erinnert worden, ſo ergiebt ſich augenſcheinlich, daß die gedachten Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, und Muſchenbroecks Rechnung nur für die Pumpe der unvollkommenſten Art gelte. Bey dieſer Art Pumpen wird alſo das Waſſer nicht ehe bis in den Stiefel ſteigen können, bevor alle Luft aus der Saugröhre heraus getreten iſt. Falls die Luft nicht insgeſammt heraus treten kann, ſo wird das Waſſer nur bis zu einer beſtimmten Höhe in der Saugröhre gelangen, und hiernächſt unbeweglich ſtehen bleiben, es mag die Bewegung des Kolbens, ſo lange man will, fortgeſetzet werden.

7. §.

Die Umſtände zu finden, unter welchen das Waſſer entweder wirklich bis in den Stiefel treten wird, oder nur bis zu einer beſtimmten Höhe in der Saugröhre gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur unvollkommenſten Art gehört.

Aufl. Es ſey (1. Fig.) $ZV = x$ die größte Höhe, auf welche das Waſſer gebracht werden kann, ſo iſt beym niedrigſten Stande des Kolbens die zurückgebliebene Luft in dem Raum $BV = n\ (b - x)$ eingeſchloſſen, und ihre Federkraft iſt ſo groß, als die natürliche Federkraft der Atmoſphäre. Beym höchſten Kolbenſtande iſt eben dieſe Menge Luft in den Raum $mc + n\ (b - x)$ ausgebreitet, alſo iſt in dieſem Zuſtande ihre Federkraft $= \frac{n\,(b - x)\,h}{mc + n\,(b - x)}$. Wenn nun dieſe $= h - x$ iſt, ſo kann das Waſſer nicht mehr ſteigen, und dies erfordert die Vorausſetzung, vermöge welcher x die größte Höhe ſeyn ſoll, die das Waſſer erreichen kann. Dieſe wird demnach durch die Gleichung $\frac{n(b-x)h}{mc+n(b-x)} = h - x$ beſtimmt, und dieſe Gleichung giebt $x^2 - (\frac{mc}{n} + b)x = -\frac{mch}{n}$, alſo $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b) - \sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n} + b)^2 - \frac{mch}{n})}$, da dann vor dem Wurzelzeichen das Zeichen (—) gebraucht werden muß, weil das Waſſer in der kleinſten von den beyden Höhen ſtehen bleiben wird, die der Gleichung ein Genüge thun.

Es iſt demnach dieſe größte Höhe allemal kleiner als $\frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b)$, alſo kleiner als die halbe Summe der Höhe der Saugröhre, und der auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhe des Kolbenzuges. Nur in dem Fall, wenn $\frac{1}{4}\frac{mc}{n} + b)^2 = \frac{mch}{n}$ iſt, erreicht das Waſſer völlig die Höhe $= \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b)$, welches alſo die halbe größte Höhe des Kolbens in dem Fall iſt, wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind. Setzt man Kürze halber $\frac{mc}{n} + b = a$, und $\frac{nc}{m} = C$, ſo hat man $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - Ch)}$.

Wenn $Ch > \frac{1}{4}a^2$ iſt, ſo giebt es für x keinen möglichen Werth, alſo giebt es auch gar keine Stelle in der Saugröhre, wo das Waſſer ſtehen bleiben könnte. Dies iſt folglich der Fall, wo das Waſſer bis in den Stiefel treten wird, und der Ausdruck $2\sqrt{Ch} > a$, oder $2\sqrt{Ch} > C + b$ beſtimmt die Umſtände, unter welcher dies erfolgen muß. Wenn demnach von den beyden Stücken b und C des Saugwerks eins gegeben iſt, ſo ergiebt der gefundene Ausdruck, wie groß das andre genommen werden müſſe, damit das Waſſer bis in den Stiefel ſteige; und hiernächſt vermittels des Kolbens bis zur Gußröhre gehoben werden könne. Man erhält nämlich $b < 2\sqrt{Ch} - C$, und $C > \frac{aa}{4h}$. Wenn alſo b gegeben iſt, ſo muß C ſo genommen werden, daß $\varrho' > (\frac{\varrho' + b}{4h})^2$ bleibt. Falls dieſer Bedingung kein Genüge geſchehen kann, ſo muß b kleiner genommen werden.

Man findet beym Muſchenbroek a. a. O. im 2131 — 2134. §. auf der 870 und 871 S. eben dieſe Sätze: ſie ſind aber bey ihm zu allgemein ausgedrückt, ſo daß es ſcheint, er wolle ſie auch auf Pumpen der mittlern Art angewandt wiſſen, welches aber keinesweges geſchehen darf, wie die folgenden Unterſuchungen ergeben werden.

8. §.

Die Gröſſe des ſchädlichen Raums, nebſt den übrigen Abmeſſungen einer Pumpe der mittlern Art ſind gegeben; man ſucht, wie hoch das Waſſer ſowohl nach dem erſten, als auch den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Es ſey (1. Fig.) A die höchſte, und C die niedrigſte Stelle des Kolbens. Die größte Höhe des Kolbens über die Fläche des Waſſers YZ ſey $= a$, die Höhe der Saugröhre $= b$, die Höhe des ſchädlichen Raums $BC = f$, und ſein körperlicher Innhalt $= k^3$, ſo iſt $b + f + c = a$. Die Querſchnitte des Stiefels und der Saugröhre bleiben m und n. Nun erhellet, daß beym erſten Kolbenzuge die in dem ſchädlichen Raum befindliche Luft ſich ausbreiten, alſo auch der in der Saugröhre befindlichen Luft, die anfangs noch die natürliche Federkraft h beſitzt, geſtatten werde, de, die Klappe B aufzuſtoſſen, und zum Theil in den Stiefel zu treten. Es ſey $ZX = x$ die Höhe, worauf das Waſſer bey dieſem erſten Kolbenzuge ſteigt, ſo breitet ſich diejenige Luft, welche vorhin den Raum $nb + k^3$ füllte, nun in den Raum $mc + k^3 + n(b - x)$ aus, alſo wird ihre Federkraft $= \frac{nb + k^3}{mc + k^3 + n(b - x)} . h$, und dieſe muß $= h - x$ ſeyn. Hieraus folgt $x^2 - \left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right) x = - \frac{mch}{n}$, und man erhält $x = \frac{1}{2} \left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{4} . \left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right)^2 - \frac{mch}{n}\right)}$. Wird nun der Kolben niedergedrückt, und dadurch die im Stiefel befindliche Luft verdichtet, ſo drückt dieſe Luft zwar ſogleich das Stiefel-Ventil zu: ſie kann aber das Kolben-Ventil nicht aufſtoſſen, bevor ihre Federkraft anfängt, die Federkraft der äußern Luft zu übertreffen. Geſetzt dies erfolgt allererſt, wenn der Kolben bis in M zurück getreten iſt; ſo wird derjenige Theil Luft, der zwiſchen C und M enthalten iſt, und mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat, bey der noch übrigen Bewegung des Kolbens durch das Kolben-Ventil hinaus treten. Der ſchädliche Raum wird mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet bleiben, da im Gegentheil die Federkraft der in der Saugröhre zurückgebliebenen und in den Raum $n(b - x)$ ausgebreiteten Luft $= h - x = h'$ iſt. Demnach wird ſich beym zweyten Kolbenzuge das Ventil B nicht ſogleich öfnen, ſondern alsdann allererſt, wenn die Federkraft der im Raum BC zurückgebliebenen, und ſich nun wieder ausdehnenden Luft anfängt, kleiner als h' zu werden. Geſetzt dies erfolgt, wenn der Kolben bis L geſtiegen iſt, ſo wird der Raum zwiſchen B und $L = \frac{h}{h'} k^3$ ſeyn. Um alſo $XW = Y$ zu finden, d. i. die Höhe, um welche das Waſſer in der Saugröhre beym zweyten Kolbenzuge ſteigt, muß man die Proportion zum Grunde legen: $mc + k^3 + n(\beta = Y) : n\beta + \frac{h}{h'}k^3 = h' : h' - Y$, da dann wie im §. $\beta = b - x$ iſt. Es folgt hieraus die Gleichung

$$Y^2 - \left(\frac{mc + k^3}{n} + \beta + h'\right) Y = \frac{(h - h')k^3}{n} - \frac{mch'}{n}.$$

Daraus wird der Werth von Y leicht gefunden, und man kann hiernächſt auf ähnliche Art ſuchen, um wieviel das Waſſer beym dritten, und den folgenden Kolbenzügen ſteigt.

9. §.

Wenn die Gröſſe des ſchädlichen Raums k^3, nebſt den übrigen Abmeſſungen der Pumpe gegeben iſt; die gröſte Höhe zu finden, worauf das Waſſer in der Saugröhre ſteigen kann.

Aufl. Wäre gar kein ſchädlicher Raum vorhanden, ſo müßte das Waſſer ſo hoch ſteigen können, als die Atmoſphäre es zu tragen vermag, alſo ohngefehr 32. rheiniſche Fuß hoch. Dieſe Höhe aber wird das Waſſer nicht erreichen können, wenn ein ſchädlicher Raum vorhanden iſt. Das Waſſer wird nur ſo lange zu ſteigen fortfahren, bis die in der Saugröhre darüber ſtehende Luft ſo weit verdünnet iſt, daß der Kolben bis zu ſeiner gröſten Höhe hinauf gezogen werden müßte, wenn die im ſchädlichen Raum befindliche Luft auf eben den Grad verdünnet werden ſollte. Sobald nämlich die Luft in dieſen Zuſtand gekommen iſt, kann aus der Saugröhre keine Luft mehr in den Stiefel, auch aus dem Stiefel nichts mehr durch das Kolbenventil in die freye Luft treten. In dieſem Zuſtande iſt alſo die Federkraft der innern Luft $= \frac{k^3}{mc + k^3}h$. Wenn demnach x die gröſte Höhe iſt, die das

Waſſer erreichen kann, ſo muß $\frac{k^3}{mc+k^3}\cdot h = h - z$ ſeyn, folglich iſt $z = \frac{mc}{mc+k^3}\cdot h$. Eben die Gleichung läßt ſich auch ſo ausdrücken $z = \frac{mc:n}{mc;n+k^3:n}\cdot h$, da dann $mc:n$, und $k^3:n$ die auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums ſind. Verſtehet man alſo durch C und F dieſe reducirten Höhen, ſo hat man $z = \frac{C}{C+F}\cdot h$. Dieſer Ausdruck kömmt alsdenn völlig mit **Belidors** Auflöſung überein. Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 928. §.

Ich muß hiebey eine ähnliche Erinnerung, wie im 3. §. machen. **Belidor** und andre Schriftſteller reduciren auch hier allemal die Höhen des ſchädlichen Raums und des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre, und betrachten ſtatt des eigentlich gegebenen Saugwerks das auf ſolche Art reducirte. So lange die Höhe des Waſſers die Höhe der Saugröhre ſelbſt nicht übertrift, ſteigt das Waſſer in dem einen Saugwerk ſo hoch als in dem andern, und was für das reducirte Saugwerk gefunden iſt, läßt ſich ohne Einſchränkung auf das andre anwenden. Allein, ſobald das Waſſer über die Saugröhre weg in den Stiefel getreten iſt, leidet dies ſeine Ausnahmen.

Dafern die Saugröhre grade die Höhe hätte, welche die Gleichung $z = \frac{C}{C+F} h$ beſtimmt, ſo würde das Waſſer zwar bis an das Stiefel-Ventil gehoben werden, keineswegs aber bis in den Stiefel hineintreten können. Weil aus der erwähnten Gleichung jede von den dreyen Größen z, C, F, gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben ſind, ſo läßt ſich die Einrichtung allemal ſo machen, daß der erwähnten Bedingung ein Genüge geſchehe, daß nämlich das Waſſer endlich bis an das Stiefel-Ventil gehoben werde.

Nimmt man die Höhe der Saugröhre kleiner als $x = \frac{mc}{mc+k^3} . h$, ſo wird das Waſſer endlich in den Stiefel treten, und ſobald dies erfolgt iſt, wird bey fortwährendem Spielen des Kolbens wenigſtens ein Theil der in dem ſchädlichen Raum bisher zurückgebliebenen Luft durch das Kolben-Ventil heraus treten. Indeſſen kann doch das Waſſer nicht bis an die niedrigſte Stelle des Kolbens ſteigen, alſo auch nicht durchs Kolben-Ventil treten, uud bis zur Guß-Röhre gehoben werden, bevor alle Luft aus dem ſchädlichen Raum herausgetreten iſt. Dafern dies nicht endlich erfolgen kann, ſo wird das Waſſer nur bis zu einer beſtimmten Höhe im Stiefel gelangen, und in dieſer Höhe unbeweglich ſtehen bleiben, es mag hiernächſt die Bewegung des Kolbens, ſo lange man will, fortgeſetzt werden.

10. §.

Die größte Höhe zu finden, auf welche das Waſſer in dem Stiefel ſteigen kann, falls nicht endlich alle Luft aus dem ſchädlichen Raum heraustritt.

Aufl. Es ſey (1. Fig.) ZN die größte Höhe, die das Waſſer erreichen kann, von der untern Waſſerfläche ZY angerechnet, und $BN = s$ die Höhe deſſelben über das Stiefel-Ventil. Wenn nun der ſchädliche Raum die Geſtalt eines Cylinders hat, deſſen Höhe $= f$, und jeder Querſchnitt $= r$ iſt; ſo wird $k^3 = rf$, und beym niedrigſten Stande des Kolbens iſt der Raum $CN = r(f - s)$ mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ausgefüllt. Dieſe breitet ſich, indem der Kolben bis A ſteigt, in den Raum $AN = mc + r(f - s)$ aus, folglich wird in dieſem verdünnten Zuſtande ihre Federkraft $= \frac{r(f - s)}{mc + r(f - s)} h$. Dieſe muß nun $= h - b - s$ ſeyn. Beyde Werthe gleich geſetzt geben die Gleichung $s^2 + (b - f - (\frac{mc}{r}) s = (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mc}{r} h$, alſo $s = \frac{1}{2} (\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd (\frac{1}{4} \frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r})$, oder $s = \frac{1}{2} (\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd \frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f + b)^2 - \frac{mch}{n}$.

Vermöge der Vorausſetzung iſt das Waſſer ſchon bis in den Stiefel getreten, deswegen iſt nothwendig $b < \frac{mch}{mc + k^3}$ (9. §.) oder $b < \frac{mch : r}{mc : r + f}$, weil hier $k^3 : r = f$ iſt. Demnach iſt auch $(\frac{mc}{r} + f) b < \frac{mch : r}{r}$, folglich $\surd (\frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r}) < (\frac{1}{2} \frac{mc}{r} + f - b)$. Wenn alſo $\frac{mc}{r} + f > b$ iſt, ſo ſind beyde Werthe von s poſitiv, und der kleinſte von beyden muß hier gebraucht werden, wie leicht in die Augen fällt. Dafern aber $\frac{mc}{r} + f < b$ iſt, ſo werden alle beyde Werthe von s negativ, und davon kann keiner ſtatt haben. Denn das Waſſer iſt nun über alle beyde Stellen, wo es hängen bleiben könnte, ſchon hinüber.

11. §.

Hieraus laſſen ſich zugleich die Umſtände ſchließen, unter welchen das Waſſer entweder einmal über das Kolbenventil hinauf treten, oder nur bis zu einer beſtimmten Höhe im ſchädlichen Raum gehoben werden kann, wenn das Saugwerk zur mittlern Art gehört. Unter den beyden Bedingungen, daß $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ und zugleich $\frac{mc}{r} + f < b$ ſey, wird die Pumpe, falls ſonſt kein Fehler vorhanden iſt, das Waſſer ſicher bis zur Gußröhre heben. Hieher gehört auch noch der Fall, wenn $\frac{mc}{r} + f = b$ iſt, und zugleich $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$, weil alsdenn beyde Werthe von s unmöglich werden. Demnach kann nur in dem einzigen Fall das Waſſer im ſchädlichen Raum auf einer beſtimmten Höhe ſtehen bleiben, wenn $\frac{mc}{r} + f > b$ iſt, wenn gleich die andre Bedingung $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ ſtatt hätte. Sollten aber auch in dieſem Fall beyde Werthe von s möglich bleiben, ſo muß nicht $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$ ſeyn. Sind dieſe beyden Ausdrücke einander gleich, ſo bleibt das Waſſer in der Höhe $\frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + f - b)$ hängen. In allen Fällen aber, wenn $\frac{mc}{n} + f > b$, und $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$, alſo $\frac{mc}{r} + f + b < 2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ iſt, wird das Waſſer nirgend ſtehen bleiben, ſondern das Saugwerk ſeine gehörige Vollkommenheit haben.

12. §.

Herr Parent hat in ſeinen Recherches de Phyſique & de Mathematique 1702 acht Aufgaben vorgetragen, welche die Theorie der Saugwerke betreffen, und ſie damals als neue Lehren bekannt gemacht, ohne die Beweiſe ſeiner Auflöſungen beyzufügen, mit einer Aufforderung an die damaligen Kunſtverſtändige, die Beweiſe zu ſuchen. Herr Belidor trägt dieſe Aufgaben des Herrn Parent mit deſſelben eigenen Worten vor in der Architect. Hydraul. III Buch III Cap. 919 — 926 §. und entwickelt hiernächſt die Theorie, worauf die Auflöſungen dieſer Aufgaben beruhen. Sein Vortrag beruhet mit dem gegenwärtigen auf einerley Gründen: allein ſeine Regeln weichen von den hier vorgetragenen, was die Pumpen der mittlern Art betrift, in einigen Stücken ab, und überhaupt hat er die ganze Theorie nicht in ihr völliges Licht geſetzet. Es kömmt nämlich das Reſultat der ganzen bisherigen Unterſuchung über die Saugwerke der mittlern Art, auf folgende Sätze an.

Wenn $b < \frac{mc}{mc+rf} h$, alſo die Höhe der Saugröhre kleiner iſt, als die vierte Proportionallinie zur Summe des Raums, worinn der Kolben ſpielt, und des ſchädlichen Raums, zum Raum worinn der Kolben ſpielt, und zur Höhe einer Waſſer-Säule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt; ſo hat das Saugwerk ſeine gehörige Vollkommenheit, falls auch überdem $\frac{mc}{r} + f$ nicht gröſſer, als b iſt. Wenn die erwähnte vierte Proportionallinie x heißt, ſo hat man $mc + rf : mc = h : x$, und da ließe ſich das erſte Verhältniß auch ſo ausdrücken $\frac{mc+rf}{n} : \frac{mc}{n}$, ſo daß ſtatt des ſchädlichen Raums, und desjenigen Raums, worinn der Kolben ſpielt, auch ihre auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen gebraucht werden können, vorhin im 10. §. ward eben dies Verhältniß ſo ausgedrückt $\frac{mc}{r}+f:\frac{mc}{r}$, alſo ward die Höhe des ſchädlichen Raums ſelbſt, und die auf die Weite des ſchädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzuges gebraucht. In Anſehung dieſer erſten Bedingung iſt es alſo einerley, ob man beyde Räume auf die Weite der Saugröhre oder des ſchädlichen Raums reducirt. In Anſehung der zweyten Bedingung aber iſt es nicht einerley. Zwar kann man dieſe zweyte Bedingung auch ſo ausdrücken $\frac{mc}{r}+\frac{rf}{n}<\frac{rb}{n}$, aber man ſiehet wohl, daß die Saugröhre alsdenn ſo betrachtet werden müßte, als ob ſie mit dem ſchädlichen Raum einerley Weite hätte.

Dafern außer der erſten Bedingung überdem $\frac{mc}{r}+f>b$ iſt; ſo hat das Saugwerk nur alsdenn ſeine Vollkommenheit, wenn auch $\frac{mc}{r}+b+f<2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ iſt. Dieſe letzte Bedingung ließe ſich nun auch ſo ausdrücken $\frac{mc}{n}+\frac{rb}{n}+\frac{rf}{n}<2\sqrt{\frac{mc}{n}:\frac{rh}{n}}$, ſo daß wiederum die auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums in Rechnung gebracht würden: allein alsdenn erhält man nicht allein $\frac{rb}{n}$ ſtatt b, wie vorhin, ſondern überdem auch $\frac{rh}{n}$ ſtatt h. Alſo iſt es bey dieſen Unterſuchungen nicht allgemein verſtattet, ſtatt eines Saugwerks ein andres zu betrachten, das aus dem vorigen entſtehet, wenn man die Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums auf die Mündung der Saugröhre reducirt. Dies hat **Parent** allemal gethan, und **Belidor** thut es auch: allein eben deßwegen bedarf ihr Vortrag einiger Verbeſſerung. Wenn der ſchädliche Raum mit der Saugröhre allemal einerley Weite hätte; ſo hätte es ſeine Richtigkeit, daß die Höhe des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre reducirt werden müßte: allein dieſer Fall kömmt in der Anwendung gar nicht vor. Gewöhnlich iſt die Weite des ſchädlichen Raums und des Kolbenzuges einerley, und alsdenn bedarf es gar keiner Reduction, weil beyde Räume ſich nun wie ihre Höhen verhalten. Der körperliche Raum der Saugröhre kömmt bey dieſer Rechnung gar nicht, ſondern allein ihre Höhe in Betrachtung, weil bey gleicher Federkraft der im ſchädlichen Raum und im Raum des Kolbenzuges ausgebreiteten Luft das Waſſer auf einerley Höhe ſtehen bleibt, die Saugröhre mag weit oder eng ſeyn. Die Federkraft dieſer Luft aber hängt bloß von dem Verhältniß des noch leeren Theils im ſchädlichen Raum gegen den Raum des Kolbenzuges ab, und gar nicht von der Größe des körperlichen Raums der Saugröhre.

13. §.

Es ſcheint, daß beyde angeführte Schriftſteller, **Parent** ſowohl, als **Belidor**, dieſen Umſtand überſehen haben: ſie könnten ſonſt nicht die allgemeine Regel geben, daß die Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums **allemal** auf die Mündung der Saugröhre reducirt werden müßten. Statt deſſen, daß hier im 10. §. die Höhe BN geſucht iſt, berechnet **Belidor** a. a. O. 933 §. die Höhe ZN, da denn, wenn die Rechnung richtig iſt, beyde Wege auf einerley Reſultat führen müſſen. Er ſetzt die Proportion an $z + c - x : z - x = a : a - x$, und bey ihm iſt a das, was hier A heißt, z iſt die Summe der Höhen der Saugröhre und des ſchädlichen Raums, $x = ZN$. Allein eigentlich verhält ſich der körperliche Raum AN zum körperlichen Raum CN $= a : a - x$, und nach der bisherigen Bezeichnung wäre der körperliche Raum AN $= nb + fr + mc - nb - r(x - b) = mc + rf - r(x - b)$, und der Raum CN $= rf - r(x - b)$, alſo $mc + rf - r(x - b) : rf - r(x - b) = h : h - x$, oder $\frac{mc}{r} + f + b - x : f + b - x = h \cdot h - x$. Vergleicht man dieſe Proportion mit der belidoriſchen, ſo ſiehet man wohl, daß beyde überein kommen, wenn man z ſtatt $f + b$, c ſtatt $\frac{mc}{r}$, und a ſtatt h ſchreibt: allein auf ſolche Art muß z die Summe der Höhe der Saugröhre, und der wahren nicht der reducirten Höhe des ſchädlichen Raums, und c die auf die Weite des ſchädlichen Raums nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges bedeuten, alſo die wahre Höhe deſſelben, wenn der Raum des Kolbenzuges und der ſchädliche Raum gleich weit ſind, die Saugröhre mag eben ſo weit, oder enger ſeyn. Die erwähnte Proportion giebt die Gleichung $(mc + r(b + f - x))(h - x) = r(b + f - x)h$, woraus $x^2 - (\frac{mc}{r} + b + f)x = -\frac{mch}{r}$, alſo $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + b + f) \pm \surd \frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + b + f^2) - \frac{mch}{r}$ folgt. Im 10. §. war BN $= s$, alſo iſt nun $x = b + s$, und $s = x - b$. Setzt man aber $x - b$ ſtatt s in der für s gefundenen Gleichung des 10. §., ſo kömmt die jetzt gefundene Gleichung heraus, daß alſo beyde Rechnungen richtig überein treffen. Wird z ſtatt $b + f$, c ſtatt $\frac{mc}{r}$, und a ſtatt h geſetzt, ſo hat man $x = \frac{1}{2}(z + c) \pm \surd(\frac{1}{4}(z + c^2) - ac)$, eben ſo wie Belidor a. a. O. den Werth für x findet, obgleich derſelbe vermöge der eben vorgetragenen Erinnerungen davon eine unrichtige Anwendung macht. Weil allemal $x > b$ ſeyn muß vermöge der Vorausſetzung, ſo muß vor der Wurzelgröße das Zeichen (+) gebraucht werden, wenn $\frac{1}{2}(z + c) < b$ iſt, obgleich Belidor ſagt, man müſſe allemal das Zeichen (—) brauchen, ſo lange die Wurzelgröße möglich iſt. Dieſe und die übrigen ſchon erwähnten Unrichtigkeiten haben daher ihren Urſprung, weil **Belidor** ſich durch die Aehnlichkeit dieſer Pumpe der mittlern Art, mit der Pumpe der unvollkommenſten Art hat verführen laſſen, was von der letztern gilt, ohne die nöthige Einſchränkung auf die erſte anzuwenden, und weil er nicht bedacht hat, daß hier bey gegenwärtiger Unterſuchung der ſchädliche Raum eigentlich das werde, was bey der Unterſuchung über die Pumpe der unvollkommenſten Art die Saugröhre war. **Parent** und **Belidor** unterſcheiden übrigens ganz richtig die beyden Fälle voneinander, wenn $c + f > b$ iſt, oder nicht, und geben für den letztern Fall die Vorſchrift, daß wenn von dieſen dreyen Stücken c, f, b, zwey gegeben ſeyn, und das dritte geſucht werde, die Rechnung nach den Regeln des 9. §. angeſtellt werden müſſe. Belidor ſagt a. a. O. 927. §. daß in der Verſchiedenheit dieſer Fälle eben der Knoten der parentiſchen Theorie ſtecke: allein er ſelbſt erkläret ſich nicht mit der nöthigen Deutlichkeit über den Grund der Verſchiedenheit dieſer Fälle, der hier im 10. §. deutlich vor Augen gelegt iſt. Beyde geben indeſſen auch für den Fall, wenn $c + f > b$ iſt, die an ſich richtige Regel, daß das Saugwerk alsdenn nur ſeine Vollkommenheit habe, wenn die Wurzelgröße in der zuletzt gefundenen Gleichung unmöglich, alſo $c + f + b > 2\sqrt{cb}$ ſey.

14. §.

Die Höhen des ſchädlichen Raums f und des Kolbenzuges c ſind gegeben, beyde ſollen gleich weit ſeyn, und man ſucht die Höhe der Saugröhre b.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{ch}{c+f}$, und vergleiche denſelben mit der Summe $c+f$. Wenn der erwähnte Quotient nicht kleiner als $c+f$ iſt, ſo wird erfordert, daß $b < \frac{ch}{c+f}$ ſey. (9. §.) Dafern aber der gedachte Quotient kleiner als $c+f$ iſt, ſo muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, ſeyn, alſo muß man $b < 2\sqrt{ch} - c - f$ nehmen.

Parent giebt folgendes Exempel. Es ſey die Höhe des reducirten Kolbenzuges 8 Fuß, des ſchädlichen Raums 12 Fuß. Das Verhältniß zwiſchen der Weite des Stiefels und der Saugröhre iſt nicht angegeben. Nimmt man an, es ſey wie 2 : 1, ſo ſind die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums 4 Fuß und 6 Fuß. Nun wird der Quotient $\frac{ch}{c+f} = 12\frac{4}{5}$, und dieſe Zahl iſt größer als $c+f = 10$. Daher genügt es, die Höhe der Saugröhre etwas kürzer als $12\frac{4}{5}$ Fuß zu nehmen. **Parent** und **Belidor** ſehen dies Exempel ſo an, als wenn es zum zweyten Fall gehöre, weil die Summe beyder reducirten Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums 20 iſt, und dieſe Zahl den Quotienten $12\frac{4}{5}$ übertrift. Deßwegen ſuchen ſie b aus der Formul $b < 2\sqrt{ch} - c - f$, welcher Ausdruck $= 12$ wird. Dies Reſultat iſt nun zwar von dem vorigen nicht ſonderlich verſchieden, indeſſen war die fernere Rechnung nicht nöthig. In dem reducirducirten Saugwerk muß die Saugröhre kleiner als 12 Fuß ſeyn. Denn wenn ſie 12 Fuß wäre, ſo würde das Waſſer in der Höhe von $\frac{1}{2}(c+f+b) = 16$ Fuß, alſo vier Fuß hoch über dem Ventil hängen bleiben. In dem natürlichen Saugwerk kann die Saugröhre volle 12 Fuß hoch ſeyn, weil $\frac{1}{2}(c+f+b) = 11$ iſt, und im 10. §. das dortige $s = \frac{1}{2}(c+f-b) = -1$ negativ ſeyn würde.

15. §.

Die Höhen der Saugröhre b, und des Kolbenzuges c ſind gegeben, man ſucht die Höhe des ſchädlichen Raums, wenn derſelbe eben ſoweit als der Stiefel ſeyn ſoll.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}$, addire dazu die Höhe des Kolbenzuges c, und vergleiche die Summe mit der Höhe der Saugröhre b. Dafern dieſe Summe nicht größer als b iſt; ſo iſt der gefundene Quotient $\frac{c(h-b)}{b}$ die Gränze, welche f nicht übertreffen darf: widrigenfalls muß $c+f+b<2\sqrt{ch}$, alſo $f<2\sqrt{ch}-b-c$ ſeyn.

Es ſey z. E. $c=4$ Fuß, $b=12\frac{4}{5}$ Fuß, ſo wird $\frac{c(h-b)}{b}=6$. Hiezu $C=4$ addirt kömmt 10 und dies iſt weniger, als $12\frac{4}{5}=b$. Alſo muß $f<6$ ſeyn, und weiter bedarf es keiner Rechnung. Wenn aber $\frac{m}{n}=2$ wäre, und man wollte nach Belidors Vorſchrift rechnen, ſo müßte man $c=8$ Fuß nehmen, und dies würde den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}=12$ Fuß geben, da dann $12+8>12\frac{4}{5}$ iſt. Alſo würde die Aufgabe zum zweyten

Fall gehören, und man fände $f < 11\frac{1}{5}$. Dies wäre denn die Gränze, welche die reducirte Höhe des ſchädlichen Raums nicht übertreffen müßte. Die wahre Höhe müßte kleiner als $5\frac{6}{10}$ ſeyn.

16. §.

Die Höhe der Saugröhre b und des ſchädlichen Raums f ſind gegeben: man ſucht die Höhe des Kolbenzuges c, noch in der Vorausſetzung, daß Stiefel und ſchädlicher Raum gleich weit ſind.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{fb}{h-b}$, addire dazu f und vergleiche die Summe mit b, falls dieſe Summe nicht größer als b iſt, ſo muß $c > \frac{fb}{h-b}$ genommen werden. Dafern aber das Gegentheil ſtatt hat, ſo muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$ ſeyn, alſo $c^2 + 2(f+b)c + (f+b^2) < 4hc$, und $c^2 - (4h - 2f - 2b)c < -(f+b^2)$. Dies giebt $c < 2h - f - b \pm \sqrt{((2h-f-b^2) - (f+b^2))}$, oder $c < 2h - f - b \pm \sqrt{2h} . \sqrt{2(h-f-b)}$. Weil nun allemal $f+b < h$ iſt, ſo iſt die Wurzelgröße allemal möglich: und weil eben dieſe Wurzelgröße kleiner iſt, als $2h - f - b$; ſo ſind beyde gefundene Gränzen von c poſitiv. Mit dieſen beyden Gränzen hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Es muß

$c - (2h - f - b) < \pm \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}$ ſeyn. Das ſind zwey Sätze, und der eine iſt dieſer

$c - (2h - f - b) < -\sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}$. Da nun allemal $c < h$ iſt, und $f + b < h$, ſo ſind dieſe beyden Werthe negativ, wie erfordert wird, aber eben deßwegen iſt wirklich

(2h

$$(2h-f-b)-c>\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)),$$

Alſo $c>2h-f-b-\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2))$.

Der andre von den obgedachten Sätzen iſt

$$c-(2h-f-b)<+\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)).$$

Hier mag die voranſtehende Größe poſitiv, oder negativ ſeyn, ſo folgt allemal daraus, es ſey

$$c<2h-f-b+\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)).$$

Demnach giebt dieſe Rechnung zwo Gränzen, zwiſchen welchen c genommen werden muß, und **Parent** hat ganz recht, wenn er ſagt, daß jede Zahl, die zwiſchen dieſen Gränzen fällt, der Frage ein Genüge leiſte, obgleich **Belidor** a. a. O. 938. §. das Gegentheil ſagt, und nur den kleinſten von beyden Werthen, als den eigentlich geſuchten gelten laſſen will. Es hat zwar ſeine Richtigkeit, daß wegen andrer Urſachen, die von der übrigen mechaniſchen Einrichtung der Pumpe abhängen, gewöhnlich ein Werth genommen wird, welcher der kleinſten Gränze am nächſten kömmt: allein davon iſt hier die Frage nicht, und beyde Gränzen geben eigentlich die vollſtändige Auflöſung der gegenwärtigen Aufgabe: ja man darf ſchlechterdings nicht die Höhe des Kolbenzuges der kleinſten Gränze gleich ſetzen, dafern das Saugwerk nicht ſtecken ſoll, und **Belidor** hätte nicht ſagen ſollen, daß man **wohl thue**, wenn man c etwas größer nehme, ſondern vielmehr, daß man c etwas größer nehmen müſſe. Uebrigens aber behält es hier ebenfalls bey den gegen alle beyde ſchon verſchiedenemal gemachten Erinnerungen ſein Bewenden. Durch c und f müſſen nicht auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen, ſondern die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums verſtanden werden, wenn beyde gleich weit ſind. Wären beyde ungleich weit, ſo müßte man durch c die auf die Weite des ſchädlichen Raums, nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges verſtehen.

Es ſey z. E. die Höhe des ſchädlichen Raums 6 Fuß, die Höhe der Saugröhre $12\frac{4}{5}$ Fuß, ſo findet man den Quotienten $\frac{fb}{h-b} = 4$. Da nun $b + 4 < 12\frac{4}{5}$, ſo bedarf es keiner weitern Rechnung, und man weis, daß $c > 4$ Fuß ſeyn müſſe. Wäre $\frac{m}{n} = 2$, ſo müßte man nach Parents und Belidors Regel $f = 12$ Fuß nehmen, alſo $\frac{fb}{h-b} = 8\,f$. Da nun $12 + 8 > 12\frac{4}{5}$ iſt, ſo müßte man mit Parent ſo rechnen

$$\begin{aligned} 2(h-f-b) &= 14,4 \\ \sqrt{2(h-f-b)} &= 3.8 \\ \sqrt{2h} &= 8. \\ \hline \sqrt{2h}\sqrt{2(h-f-b)} &= 30,4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h-f-b &= 7,2 \\ h &= 32 \\ \hline 2h-f-b &= 39,2 \\ \mp\ & 30 \\ \hline \end{aligned}$$

die eine Gränze 8, 8
die andre Gränze 69, 6.

Die Gränzen der wahren Höhe des Kolbenzuges wären alſo 4, 4, und 34, 8 Fuß. Daß übrigens jede zwiſchen den Gränzen 8, 8, und 69, 6 fallende Zahl der Bedingung $c + f + b < 2\sqrt{ch}$ ein Genüge thue, davon kann man ſich durch Verſuche überzeugen, wenn man eine willkührliche Zahl, die zwiſchen dieſen Gränzen fällt, ſtatt c ſetzt, z. E. $c = 40$. Dies giebt $c + f + b = 64\frac{4}{5}$, und $2\sqrt{ch} = 75,3$, alſo $c + f + b < 2\sqrt{ch}$. Jede andre Zahl aber, die außerhalb dieſer Gränzen fällt, giebt, wenn man ſie ſtatt c ſetzt, $c + f + b > 2\sqrt{ch}$. Setzt man z. E. $c = 70$, ſo wird $c + f + b = 94,8$, und $2\sqrt{ch} = 94,6$. Setzt man $c = 8$, ſo findet man $c + f + b = 32,8$, und $2\sqrt{ch} = 31,9$.

* * *

Unterſuchung

Ueber die Bewegung des Waſſers im Stiefel, nachdem ſchon alle Luft aus dem ſchädlichen Raum ausgetreten iſt.

---

17. §.

Die bisherigen Unterſuchungen betrafen die Vollkommenheit eines Saugwerks in Anſehung der anfänglichen Bewegung des Waſſers in der Saugröhre und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht: und nunmehr ſoll die im 2. §. vorläufig überhaupt erwähnte Unterſuchung darüber angeſtellet werden, mit welcher Geſchwindigkeit der Kolben bewegt werden müſſe, damit die Pumpe bey jedem Hub ohne Zeitverluſt ſoviel Waſſer gebe, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann. Um dieſe Unterſuchung zu erleichtern, ſtelle man ſich vorläufig eine gerade vertical ſtehende cylindriſche Röhre vor, die mit ihrem untern offenen Ende z im Waſſer ſteht. Sie kann übrigens entweder durchgängig von gleicher Weite, oder auch aus mehrern Stücken von verſchiedener Weite zuſammengeſetzet ſeyn. Dieſe ſey etwa 32 Fuß hoch, oben bey Q verſchloſſen, und in derſelben keine Luft befindlich; ſo erhellet, daß der Druck der Atmoſphäre das Waſſer in dieſe Röhre hinauf treiben werde. Es ſey in der Röhre irgendwo bey C eine Klappe, oder ſonſt ein Hindernis befindlich, welches das Waſſer über C hinauf zu ſteigen verhindert, und ſolchergeſtalt nunmehr in Ruhe erhält. Wird nun in einem gewiſſen Augenblick die Klappe C geöfnet, ſo fängt das Waſſer ſogleich an, höher zu ſteigen, und man kann nun fragen: mit welcher Geſchwindigkeit es in dem Augenblick ſteige, da es eine gegebene Höhe ZM erreicht. Wenn OB und BQ Stiefel und Saugröhre eines Saugwerks ſind, ſo befindet ſich das Waſſer in dem Stiefel bey jedem neuen Kolbenzuge unter eben den Umſtänden. Indem der Kolben herab ſteigt, und ſich das Stiefel-Ventil ſchließet, wird alles Waſſer unter dem Kolben zur Ruhe gebracht, und bis in den Augenblick, da er ſeine niedrigſte Stelle C erreicht, iſt er das, was eine Klappe bey C wäre, die das Waſſer weiter hinauf zu ſteigen hinderte. So wie der Kolben aber wieder hinauf zu ſteigen anfängt, geſtattet er auch dem unter ihm befindlichen Waſſer nachzufolgen.

18. §.

Lehnſatz. **Das Gefäß (3. Fig.)** $ABEO$ **iſt bis auf eine gewiſſe Höhe mit Waſſer gefüllt, und hängt mit einer Röhre** $OpqR$ **zuſammen, ſo daß das Waſſer aus dem Gefäß in die Röhre treten kann. Außer der Schwere drückt noch auf die Oberfläche deſſelben** AB **eine gegebene Kraft, und treibt es aus dem Gefäß in die Röhre hinein, die hier von unbeſtimmter Länge angenommen wird. Man ſetze, im Gefäß habe anfangs das Waſſer bis an** AB**, in der Röhre aber bis an den Querſchnitt** ab **geſtanden, und es habe um im Gefäß den Weg** $G\gamma$**, in der Röhre aber den Weg** cg **durchlaufen: man ſucht die Geſchwindigkeit der vordern Fläche** PQ.

Aufl. Wenn $GSKcg$ die centriſche Linie derjenigen Querſchnitte CD, HI, MN, u. ſ. f. des Waſſers iſt, welche die Eigenſchaft haben, daß alle in denſelben liegende Waſſertheilchen mit gleicher Geſchwindigkeit fortgehen nach Richtungen, die mit der jedesmaligen Lage der centriſchen Linie übereinkommen, und die centriſche Linie ſelbſt ſowohl auf dieſen Querſchnitten, als auch auf den äußern Flächen CD, PQ, ſenkrecht iſt, ſo ſey $CD = Y$, $PQ = w$, ein unbeſtimmter Querſchnitt $MN = z$, das zugehörige

Stück der centriſchen Linie $cKS = s$, und $cg = w$. Wenn ferner K der niedrigſte Punct der centriſchen Linie, und HI durch dieſen Punct horizontal gezogen iſt, $\gamma\delta$ und gd aber vertical ſind; ſo ſey $\gamma\delta = x$, $gd = u$. Wenn überdem der Druck auf CD ſo groß iſt, als das Gewicht einer Waſſer-Säule auf eben dieſer Grundfläche in der Höhe p, und der geſuchten Geſchwindigkeit die Höhe q zugehört, ſo hat man nach den Grundſätzen der Hydraulik

$$\frac{y^2 - w^2}{y^2} q + \frac{w\,dq + 2q\,dw}{dw} \int \frac{ds}{z} = p + x - u.$$

Das Integral $\int \frac{ds}{z}$ muß ſo genommen werden, daß es für $s = -w$ verſchwindet, und man muß nach der Integration ſtatt s die Länge der ganzen centriſchen Linie $CKS\gamma$ ſetzen.

19. §.

Es ſey das Gefäß (4. Fig.) $ABEO$ ein grades vertical ſtehendes Priſma oder ein grader Cylinder, und jeder Querſchnitt deſſelben $= k$. Die Röhre $OpqR$ ſey aus zweenen graden Cylindern $OmnR$ und $opqr$ zuſammengeſetzt, deren Axen Kk und kg in grader Linie liegen, und deren Querſchnitte n und m ſind: man ſucht die Geſchwindigkeit der Fläche pq, wenn alles übrige ſo bleibt, wie es im vorigen §. angenommen worden.

Aufl. Bey dieſen Vorausſetzungen hat man $Y = k$, $w = m$, $dw = dm = 0$, weil m conſtant iſt. Ferner ſey $Kk = \beta$, $kc = f$, der Winkel $gkd = \eta$, ſo iſt $gd = u = (\beta + f + w)\,\sin\eta$. Um nun das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu finden, ſuche man es zuerſt für die Röhre $opqr$, ſo hat man $\int \frac{ds}{z} = \frac{s + w}{m}$. Man ſetze $s = ck = f$, ſo iſt dies Integral $= \frac{f + w}{m}$ für die Röhre $opqr$. Für beyde

Röhren zuſammen wird es $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n}$, und weil hier $\delta\gamma = x$ iſt, ſo wird es für die ganze Maſſe des Waſſers $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{x}{k}$. Es ſey $\delta G = a$, ſo iſt $x = a - G\gamma = a - \frac{mw}{k}$, alſo $\int \frac{ds}{x} = \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2}$. Alle dieſe Werthe ſetze man in die Gleichung des vorigen §. ſo wird $\frac{k^2 - m^2}{k^2} q + \frac{m\,dq}{dw} \Big(\frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2} = p + a - \frac{mw}{k} - (\beta + f + w) \sin\eta$.

20. §.

Alle übrige Stücke bleiben ſo wie im vorigen §. angenommen iſt, nur iſt das Gefäß *ABEO* in Vergleichung mit der Röhre *O p q R*. ſehr weit, und der Druck auf *CD* beſtändig von einerley Größe: man ſoll die Gleichung zwiſchen *q* und *w* finden.

Aufl. Vermöge der Vorausſetzung kann man $\frac{m}{k} = 0$ ſetzen. Weil überdem p eine beſtändige Größe iſt; ſo ſetze man $p + a = A$, und man erhält die Gleichung $q\,dw + (f + w + \frac{m\beta}{n})\,dq = A\,dw - (\beta + f + w)\,dw \sin\eta = (A - (\beta + f) \sin\eta)\,dw - w\,dw \sin\eta$. Um das Integral zu finden, ſetze man $f + w + \frac{m\beta}{n} = u$, alſo $w = u - f - \frac{m\beta}{n}$, und $dw = du$, ſo erhält man $q\,du + u\,dq = (A - (\beta + f) \sin\eta)\,du - (u - f - \frac{m\beta}{n})\,du \sin\eta$.

oder $q\,du + u\,dq = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\sin\eta)\,du - u\,du\sin\eta$.

Kürze halber ſey $A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\sin\eta = B$, ſo giebt die Integration $uq = Bu - \frac{1}{2}\,uu\sin\eta + C$. Wenn nun $w = 0$ iſt, ſo wird $u = f + \frac{m\beta}{n}$, und zugleich $q = 0$. Dies giebt die beſtändige Größe $C = \frac{1}{2}(f + \frac{m\beta}{n})^2\sin\eta - B(f + \frac{m\beta}{n})$, folglich iſt $u.q = B(u - f - \frac{m\beta}{n} + \frac{1}{2}((f + \frac{m\beta}{n})^2 - uu)\sin\eta$. Da nun $u - f - \frac{m\beta}{n} = vv$ iſt, ſo wird $B(u - f - \frac{m\beta}{n}) = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\sin\eta)\,vv$. Ferner wird $uu = (f + \frac{m\beta}{n})^2 + 2(f + \frac{m\beta}{n})vv + vvvv$, und wenn man dieſe Werthe gehörig ſubſtituirt, ſo iſt die geſuchte Gleichung zwiſchen q und vv gefunden.

21. §.

Weil bey dieſer Auflöſung die Größe des Winkels $gkd = \eta$ noch unbeſtimmt geblieben iſt, ſo ſiehet man wohl, daß auch der Fall darunter begriffen ſey, wenn die Röhre OpqR vertical ſteht. Aber alsdenn iſt es gleichviel, ob dieſe Röhre außerhalb des Gefäſſes befindlich iſt, und unmittelbar an demſelben anliegt, ſo daß das Waſſer unten bey O hinein treten kann, oder, ob die Röhre innerhalb des Gefäſſes im Waſſer ſteht, wie in der 5. Figur. Man hat nun $\sin\eta = 1$, und dieſer Vorausſetzung gemäß wird $u.q = (A + \frac{m\beta}{n} - \beta)vv - (f + \frac{m\beta}{n})vv - \frac{1}{2}vv\,vv = (A - \beta - f)vv - \frac{1}{2}vv\,vv$; alſo $q = \frac{(A - \beta - f)\,nvv - \frac{1}{2}\,nvv^2}{n(f + vv) + m\beta}$.

Man ſetze $\beta + f = b$, alſo $f = b - \beta$, ſo erhält man $q = \frac{(A - b)\,n vv - \frac{1}{2} n\, vv^2}{n\,(b - \beta + vv) + m\beta}$, oder $q = \frac{(A - b)\,vv - \frac{1}{2}\,vv^2}{b + \frac{m - n}{n}\beta + vv}$.

Dafern aber $b + vv = x$, alſo $vv = x - b$ geſetzt wird, ſo hat man $q = \frac{A\,(x - b) - \frac{1}{2}\,(xx - bb)}{x + (m - n)\,\beta : n}$, oder $q = \frac{n\,A\,(x - b) - \frac{1}{2}\,n\,(xx - bb)}{n\,x + (m - n)\,\beta}$.

Wenn beyde Stücke der Röhre O$pq$R gleich weit ſind, alſo zuſammen nur eine einzige Röhre ausmachen, ſo hat man $m = n$, alſo $q = \frac{(A - b)\,vv - \frac{1}{2}\,vv^2}{b + vv}$, oder auch $q = \frac{n\,A\,(x - b) - \frac{1}{2}\,n\,(xx - bb)}{n\,x} = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A - \frac{1}{2}b)\,b}{x}$.

22. §.

Die ganze Länge der Saugröhre, (5. Fig.) nebſt den Höhen des ſchädlichen Raums, und des Kolbenzuges eines Saugwerks ſind gegeben, nebſt den Querſchnitten des Stiefels und der Saugröhre: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel, nachdem es um eine gegebene Höhe CM über den niedrigſten Kolbenſtand geſtiegen iſt. Vorausgeſetzt; daß der Kolben der Bewegung des Waſſers gar nicht hinderlich ſey.

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt nur ein beſonderer Fall der vorigen. Gewöhnlich ſteht die Saugröhre in einem Waſſerbehälter, der in Vergleichung mit der Röhre ſehr weit iſt. Die Atmoſphäre drückt auf die Oberfläche des Waſſers in dieſem Behälter, und treibt das Waſſer über die niedrigſte Stelle des Kolbens im Stiefel hinauf, ſobald der Kolben hinauf gezogen wird. Man ſetze alſo die Länge der ganzen Saugröhre $= \beta$, die Höhe des ſchädlichen Raums $= f$, die Tiefe, um welche die Saugröhre im Waſſer ſteht, $OZ = a$, die Federkraft der Atmoſphäre $= h$, die Höhe, um welche das Waſſer im Stiefel geſtiegen iſt, $CM = w$, die Querſchnitte des Stiefels $= m$, und der Saugröhre $= n$, die geſuchte Geſchwindigkeit $= \sqrt{q}$, ſo iſt $q = \frac{(a+h-\beta-f)w - \frac{1}{2}vv^2}{f+w+\frac{m}{n}\beta}$; oder auch $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+\frac{m-n}{n}\beta+w}$, wenn man A ſtatt $a+h$, und b ſtatt $\beta+f$ ſchreibt: oder $q = \frac{A(x-b) - \frac{1}{2}(xx-bb)}{\frac{m-n}{n}\beta + x}$, wenn man $b+w = x$ ſetzt. In dem Fall, wenn Stiefel und Saugröhre gleiche Weite hätten, alſo $m = n$ wäre, erhielte man $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+w}$, oder $q = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A-\frac{1}{2}b)\,b}{x}$.

23. §.

Belidor ſtellt in der Architectura Hydraul. im III Kap. des III Buchs 906. u. f. §. §. eben dieſe Unterſuchung an: allein er bringt ein ganz andres Reſultat heraus. Man hatte ſonſt gewöhnlich $q = \frac{n^2}{m^2}(h-x)$ angenommen, wenn durch x die Höhe ZM des Waſſers über die untere Waſſerfläche YZ verſtanden wird, und Belidor meldet a. a. O. im 907. §., daß er ſelbſt dieſe Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel für die richtige gehalten habe, bis er endlich bey Berechnung einer von ihm erfundenen Maſchine den Fehler eingeſehen, und verbeſſert hätte. Allein ihm ſind bey Verfertigung ſeines vortreflichen Werks, welches im Jahr 1737. zu Paris herausgegeben iſt, die von den beyden Herrn Bernoulli um eben die Zeit gemachten neuen Entdeckungen in der Hydraulik noch nicht bekannt geweſen, und ſeine Auflöſung dieſer Aufgabe iſt eben ſo wenig richtig, als die alte von ihm getadelte Auflöſung. Er findet $\sqrt{q} = \frac{n}{m}(\sqrt{h} - \sqrt{x})$, alſo $q = \frac{n^2}{m^2}(h - 2\sqrt{hx} + x)$, und **Muſchenbroeck** trägt in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2148 - 2152. p. 878 - 880. ebenfalls dieſe belidoriſche Theorie vor. Beyde verſtehen alsdenn durch h die Höhe einer Waſſerſäule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt, und durch x die Höhe ZM des Waſſers über den Waſſerpaß YZ. Aber dieſe Beſtimmung hat mit der vom Herrn **Belidor** getadelten ältern Beſtimmung verſchiedene Hauptfehler gemein. Einmal hängt keine derſelben vom niedrigſten Kolbenſtande ab, da es doch gewiß nicht einerley iſt, in welcher Höhe das Waſſer ſeine Bewegung von der Ruhe anfängt. Fürs zweyte müßte nach beyden Beſtimmungen $q = 0$ ſeyn, wenn $x = h$ iſt, oder das Waſſer müßte nur etwa 32 Fuß hoch ſteigen können, welches wiederum falſch iſt. Endlich müßte noch fürs dritte die Geſchwindigkeit des ſteigenden Waſſers im erſten Anfang des Kolbenhubs am größten ſeyn, und hiernächſt beſtändig abnehmen. Daß auch dies fehlerhaft ſey, werden die folgenden Unterſuchungen mit mehrern ergeben. Ich habe beym Nachſchlagen niemand gefunden, der dieſe Theorie von den Pumpen aus den nunmehr richtig erwieſenen Geſetzen der Hydraulik hergeleitet hätte. Die Herrn **Johann** und **Daniel Bernoulli** haben die Gründe davon erfunden. Beyde aber haben davon keine weitere Anwendung auf die Saugwerke gemacht. Ihre Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer in einer verticalen durchaus gleich weiten cylindriſchen Röhre aufwärts ſteigt, wenn die Röhre in einem ſehr weiten Waſſerbehälter ſteht, und anfangs die Höhe des Waſſers in der Röhre kleiner iſt, als die Höhe des Waſſers im Behälter, haben mit der gegenwärtigen Theorie die nächſte Verwandſchaft. M. ſ. Jo. Bernoulli Hydraul. P. I. §. 24. Oper. T. IV. pag. 419. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. VII. §. 16. p. 136. Wenn man die Vergleichung anſtellen will, ſo wird man finden, daß die Reſultate ihrer Rechnungen mit den hieſelbſt im 21. §. heraus gebrachten Gleichungen überein kommen, in wie weit die beyderſeitigen Vorausſetzungen einerley ſind.

24. §.

Die Höhe zu finden, worauf das Waſſer im Stiefel ſteigen könnte, wenn der Stiefel von unbeſtimmter Höhe wäre, und der Kolben ſo ſchnell ſtiege, daß derſelbe die Bewegung des Waſſers nicht hinderte.

Aufl. Das Waſſer wird ſo lange ſteigen, bis $q = 0$ wird. Man ſetze demnach $q = \frac{(A - b)\,w - \frac{1}{2} w^2}{b + \frac{n-u}{n}\beta + w} = 0$, ſo erhält man $w^2 - 2\,(A - b)\,w = 0$, und beyde Wurzeln dieſer Gleichung ſind $w = 0$, und $w = 2\,(A - b)$. Es mußte aber vermöge der Vorausſetzung im Anfang der Bewegung $q = 0$ ſeyn, und daher kömmt der eine Werth $q = 0$. Der andre $w = 2\,(A - b)$ ergiebt, daß das Waſſer bis auf die Höhe $2\,(A - b)$ über die niedrigſte Stelle des Kolbens hinauf ſteigen würde, wenn es der Kolben nicht hinderte.

So lange w zwiſchen dieſen beyden Gränzen 0 und $2\,(A - b)$ bleibt, ſo lange iſt q poſitiv, und q wächſt anfangs mit w, nimmt aber hiernächſt wieder ab. Dies ergiebt ſich am deutlichſten aus der Differentialgleichung $dq = \frac{A - (b + w) - q}{f + w + \frac{m\beta}{n}}$, (20. §.) wo nun $fmn = 1$ iſt. Dieſer Ausdruck iſt poſitiv, ſo lange

$A-(b+w) > q$ iſt, folglich wächſt q ſo lange, als dieſe Vorausſetzung ſtatt hat, und nimmt wieder ab, wenn $q > A-(b+w)$ wird. Die Geſchwindigkeit des Waſſers muß alſo am größten ſeyn, wenn $A-(b+w) = q$ iſt, denn nun iſt $dq = o$.

25. §.

Die größte Geſchwindigkeit zu finden, die das im Stiefel hinauf ſteigende Waſſer erreichen kann, nebſt der Höhe, auf welche es ſteigen muß, bevor die Geſchwindigkeit am größten wird.

Aufl. Es iſt die der größten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $q = A-(b+w)$, und der unbeſtimmte Werth von q iſt $= \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+\lambda\beta+vv}$, wenn man Kürze halber $\frac{m-n}{n} = \lambda$ ſetzt. Beyde Werthe einander gleich geſetzt geben die Gleichung $A(b+vv) - (b+vv^2) + A\lambda\beta - \lambda\beta\,(b+vv) = (A-b)\,vv - \frac{1}{2}vv^2$, und daraus folgt

$$vv^2 + (b+\lambda\beta)\,vv = 2\,(A-b)\,\lambda\beta + 2\,(A-b)\,b,$$

folglich $vv = -(b+\lambda\beta) \pm \surd\,(\lambda^2\beta^2 + 2A\lambda\beta + 2\,(A-b)\,b)$. Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden, ſondern der poſitive iſt der geſuchte. Und wenn derſelbe ſtatt vv in die Gleichung $\surd q = \surd\,(A-b-vv)$ geſetzt wird, ſo ergiebt ſich die geſuchte größte Geſchwindigkeit.

Weil ſich der gefundene Werth von vv auch ſo ausdrücken läßt: $vv = \surd\,((b+\lambda\beta^2) + 2\,(A-b)\,(b+\lambda\beta)) - b + \lambda\beta$, ſo erhellet, daß allemal $vv < A-b$ ſey, weil die Wurzelgröße kleiner als $b+\lambda\beta+(A-b)$ iſt. Je kleiner indeſſen $A-b$ ſelbſt in Vergleichung mit $b+\lambda\beta$ iſt, deſto näher kömmt die Wurzelgröße dieſem Werth $b+\lambda\beta+(A-b)$ folglich kömmt zugleich

vv dem Werth $A - b$ deſto näher. Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Saugwerke findet dieſe Vorausſetzung allemal ſtatt, daß $b + \lambda\beta$ in Vergleichung mit $A - b$ ziemlich groß iſt. Daher wird das in dem Stiefel hinauf ſteigende Waſſer auch gewöhnlich ſo lange mit zunehmender Geſchwindigkeit ſteigen, bis es mehrentheils 31 bis 32 Fuß hoch über die Oberfläche desjenigen Waſſers erhaben iſt, worinn die Saugröhre ſteht.

26. §.

Hiedurch wird alſo dasjenige beſtättiget, was am Ende des 23. §. behauptet worden. Es iſt falſch, daß das Waſſer gleich vom Anfange mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteige: vielmehr erfolgt grade das Gegentheil, es ſteigt mit zunehmender Geſchwindigkeit. Nur in dem einzigen Fall, wenn der Stiefel und die ganze Saugröhre gleich anfangs von Luft und Waſſer leer wären, ſo würde die Geſchwindigkeit des hinein tretenden Waſſers aufs ſchnelleſte, und faſt augenblicklich bis zur größten anwachſen, und hiernächſt wieder beſtändig abnehmen. Die größte Geſchwindigkeit ſelbſt wäre alsdenn $= \sqrt{A}$. Man müßte nämlich für dieſen Fall $b = 0$ und $\beta = 0$ ſetzen. Dies giebt den Werth von $vv = 0$, welcher der größten Geſchwindigkeit zugehört, und die größte Geſchwindigkeit ſelbſt $\sqrt{q} = \sqrt{A}$. Dies ſcheint den vorigen Vorausſetzungen entgegen zu ſeyn, vermöge welcher $q = 0$ ſeyn mußte, wenn $vv = 0$ iſt. Allein man muß ſich hiebey erinnern, daß die bisherigen Rechnungen in der That nur Näherungen ſind, und daß im 20. §. $\frac{m}{k} = 0$ geſetzt ſey. Dafern man in der dortigen Differentialgleichung nur die in $\frac{m^2}{k^2}$ multiplicirten Glieder wegläßt, und $\sin x = 1$ ſetzt, wie hier erfordert

dert wird, ſo hat man $q\,dvv + (f + vv + \frac{m\beta}{n} + \frac{ma}{k}\,dq = (A - \beta - f)\,dvv - (\frac{m}{k} + 1)\,vvdvv$. Man ſetze überdem der jetzigen Vorausſetzung gemäß $\beta = 0$, $f = 0$, $m = n$, ſo wird $qdvv + (\frac{na}{k} + vv)\,dq = Advv - (\frac{n}{k} + 1)\,vv\,dvv$. Ferner ſey $\frac{na}{k} + vv = u$, alſo $vv = u - \frac{na}{k}$, und $dvv = du$, ſo erhält $qdu + udq = (A + \frac{na}{k})\,du - (\frac{n}{k} + 1)\,udu$, und dies giebt $uq = (A + \frac{na}{k})\,u - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,u^2 + C$. Für $vv = 0$ iſt $u = \frac{na}{k}$, und $q = 0$, alſo $C = -\frac{na.A}{k}$. Wenn man nun den Werth $u = \frac{na}{k} + vv$ wieder herſtellt, und die höhern Potenzen von $\frac{n}{k}$ wegläßt, ſo erhält man $q\,(\frac{na}{k} + vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2$, folglich $q = \frac{A\,k\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2}{na + kvv}$. Dieſe Gleichung giebt $q = 0$ für $vv = 0$, wie erfordert wird: ſo bald aber nur ein ſehr kleiner Werth ſtatt vv geſetzt wird, iſt ſehr nahe $q = A$.

Wenn nun ferner, um die größte Geſchwindigkeit zu finden, $dq = 0$ geſetzt wird, ſo hat man $q = A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv$, und dieſer Werth dem vorigen gleich geſetzt giebt $(\frac{na}{k} + vv)\,(A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,vv^2$, alſo $\frac{1}{2}(n + k)\,vv^2 +$

$navv = naA$, woraus $vv^2 + \frac{2na}{n+k} vv = \frac{2naA}{n+k}$, alſo $vv = \frac{\sqrt{(n^2 a^2 (n+k) + 2naA)} - na}{n+k}$ folgt. Demnach iſt vv ungemein klein, wenn k ſehr groß iſt, und für $k = \infty$, würde $vv = 0$ ſeyn. Eigentlich iſt alſo in dem jetzt betrachteten Fall die der größten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= A - \frac{1}{k} (\sqrt{(n^2 a^2 (n+k) + 2naA)} - na)$.

27. §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, (5. Fig.) wie im 22. §. man ſucht die Zeit, worinn das Waſſer im Stiefel um eine gegebene Höhe CM $= vv$ ſteigt.

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dvv}{\sqrt{q}}$, wenn alſo der Werth von q aus dem 22. §. gebraucht wird, ſo erhält man $dt = \frac{dvv \sqrt{(b + \lambda\beta + vv)}}{\sqrt{((A-b)vv - \frac{1}{2} vv^2)}}$. Um das Integral hievon ohne weitläuftige Rechnung ſo genau zu finden, als bey dergleichen practiſchen Unterſuchungen genügen kann, darf man nur erwägen, daß in der Anwendung auf das Saugwerk allemal $b + \lambda\beta$ beträchtlich größer ſey, als vv, weil vv nicht leicht über 4 Fuß ſeyn wird, b und β aber gewöhnlich einige 20 Fuß groß ſind, auch meiſtentheils $\lambda > 1$ iſt. Setzt man nun Kürze halber $b + \lambda\beta = B$, ſo iſt beynahe $\sqrt{(B + vv)} = \sqrt{B}$. Eigentlich iſt $\sqrt{(B+vv)} > \sqrt{B}$, und $\sqrt{(B + vv)} < \sqrt{B} + \frac{vv}{2\sqrt{B}}$, da denn dieſe letztere Betrachtung dazu dienet, ein paar Gränzen zu finden, zwiſchen welchen t fällt, die ſehr wenig voneinander werden unterſchieden ſeyn.

Man nehme alſo zuerſt $\sqrt{(B+vv)} = \sqrt{B}$ an, und ſetze $dt = \frac{dvv\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cvv - vv^2)}}$, wo $c = a - b$ iſt; ſo giebt die Integration $t = A\sin v.\frac{vv}{c} \times \sqrt{2B}$, wo keine Conſtans nöthig iſt, weil t und vv zugleich verſchwinden müſſen. Iſt alſo g die Höhe, wovon ein ſchwerer Körper in der erſten Secunde frey herab fällt, ſo hat man $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}} A\sin v.\frac{vv}{A-b}$, und dieſer Ausdruck giebt die geſuchte Zeit in Secunden, jedoch nicht ganz genau, ſondern etwas ſehr weniges zu klein. Will man finden, wieviel der Fehler höchſtens betragen kann, ſo ſetze man $dt = \frac{dvv\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cvv-vv^2)}} + \frac{vv\,dvv}{\sqrt{2B}\sqrt{(2cvv - vv^2)}}$, und man erhält durch die Integration $\int\frac{vv\,dvv}{\sqrt{(2cvv - vv^2)}} = c.A\int v\frac{vv}{c} - \sqrt{(2cvv - vv^2)}$. Weil nun $\sqrt{(2cvv - vv^2)} = c\sin A\sin v.\frac{vv}{c}$, ſo wird dies Integral $= c(A\sin v\frac{vv}{c} - \sin A\sin v.\frac{vv}{c})$, folglich $t = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{}^{2}\,g} A\sin v\frac{vv}{c} + \frac{c}{2\sqrt{2gB}}(A\int v.\frac{vv}{c} - \sin A\int v\frac{vv}{c})$. Da nun dieſer Werth von t ſchon etwas weniges zu groß iſt, ſo hat man zwo Gränzen, zwiſchen welchen der eigentliche Werth von t enthalten iſt.

28. §.

Bey eben den gegebenen Stücken, wie im vorigen §. die Geſchwindigkeit zu finden, womit der Kolben bewegt wer-

werden muß, damit das Saugwerk ohne Zeitverluſt bey jedem Kolben-Hub ſoviel Waſſer gebe, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann.

Aufl. Die Geſchwindigkeit des Kolbens muß ſo groß ſeyn, daß derſelbe in eben der Zeit um die Höhe des Kolbenzuges ſteigt, binnen der das Waſſer im Stiefel eben dieſe Höhe erreicht. Man ſuche alſo nach dem vorigen §. die Zeit, binnen der das Waſſer vom niedrigſten bis zum höchſten Kolbenſtande ſteigt, und ſetze dieſe $= t$. Iſt nun die Höhe des Kolbenzuges $= vv$, die Geſchwindigkeit des Kolbens $= v$, ſo iſt die Zeit, binnen der derſelbe den Weg $= vv$ zurück legt, $= \frac{vv}{v}$, weil er mit gleichförmiger Bewegung ſteigt. Dieſe Zeit muß $= t$ ſeyn; alſo hat man $v = \frac{vv}{t}$.

Es ſey z. E. $\beta = 21\frac{1}{2}$ Fuß, $f = \frac{1}{2}$ Fuß, alſo $b = 22$ Fuß $vv = 2$ Fuß, der Durchmeſſer der Mündung des Stiefels $= 6$ Zoll, der Mündung der Saugröhre $= 2\frac{1}{6}$ Zoll, alſo $m : n = 36 : \frac{169}{36} = 1296 : 169$, und $\frac{m-n}{n} = \frac{1127}{169} = 6{,}\ 668639$; ſo wird $b + \frac{m-n}{n}\beta = 165{,}\ 375738 = B$, und $\sqrt{2B} = 18{,}\ 1865$. Wenn man nun $h = 31$ Fuß ſetzt, und $a = 6$ Fuß iſt, ſo wird $A = a + h = 37$ Fuß, alſo $A - b = c = 15$ Fuß, und $\frac{vv}{c} = \frac{2}{15} = 0{,}\ 1333333$. Dieſer Querſinus gehört zum Winkel von $29°56'$, und man erhält $A.\ 29°56' = 0{,}\ 522427$. Setzt man nun voraus, daß das gebrauchte Maaß das franzöſiſche ſey, ſo iſt $g = 15{,}\ 1$ Fuß, und $2\sqrt{g} = 7{,}\ 7716$. Demnach wird $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}} A\,ſv\,\frac{vv}{c} = 1{,}\ 223$ Secunden, ſo daß dieſe Zeit noch nicht völlig $1\frac{1}{4}$ Secuncunde beträgt. Wollte man ſich davon verſichern, daß die Zeit genau genug gefunden ſey, ſo müßte man noch den Ausdruck $\frac{c}{2\sqrt{g}\sqrt{2B}}\left(A\int v\frac{vv}{c} - \sin A \sin v\frac{vv}{c}\right)$ berechnen. Man findet aber

$$A \sin v\frac{vv}{c} = 0,\ 522427$$

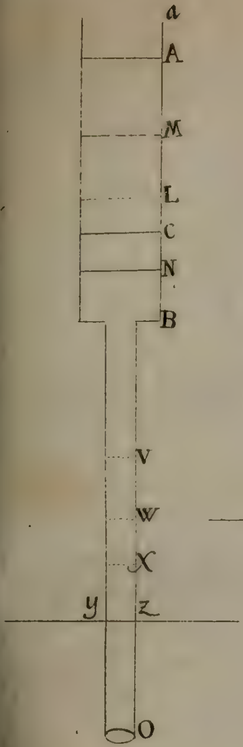
$$\sin A \sin v\frac{vv}{c} = 0.\ 498992$$

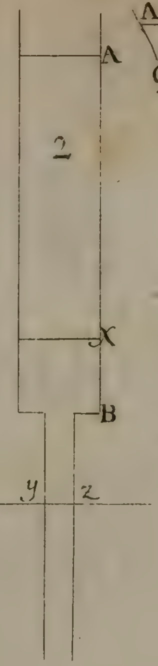
die Differenz $= 0.\ 023435$

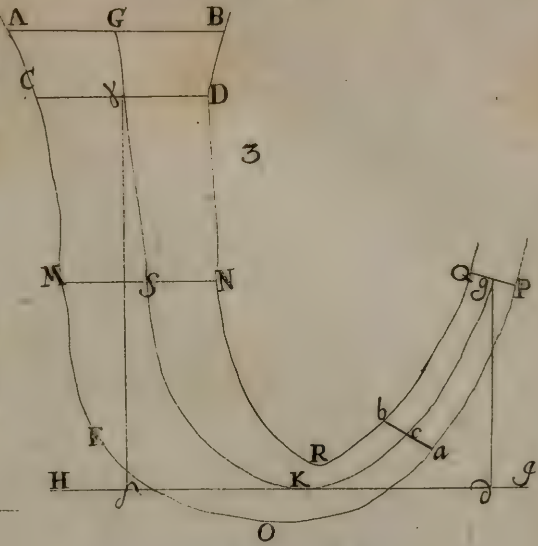
und die übrige Rechnung ergiebt für den erwähnten Ausdruck 0, 00248 Sec. Da nun der Fehler in Beſtimmung der Zeit nach der erſten Formul nicht ſo groß iſt, als dieſe Zahl; ſo iſt jene Rechnung ſo weit es hier erfordert wird, zulänglich richtig. Man muß indeſſen wegen der Friction und andrer Hinderniſſe der Bewegung dieſe Zeit etwas weniges größer annehmen, als die Rechnung giebt, und man kann ſie im gegenwärtigen Exempel auf $\frac{1}{4}$ Secunden ſchätzen. Dies würde alſo für die Geſchwindigkeit des Kolbens $1\frac{3}{5}$ Fuß oder 1 Fuß $7\frac{1}{5}$ Zoll in einer Secunde geben.

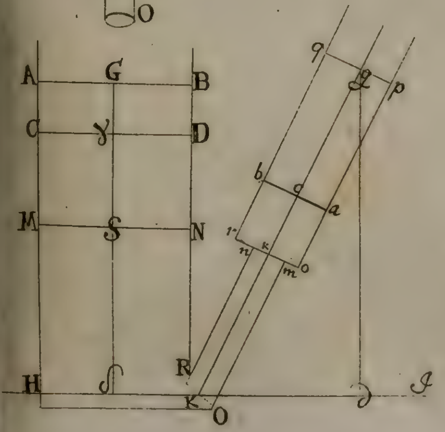
29. §.

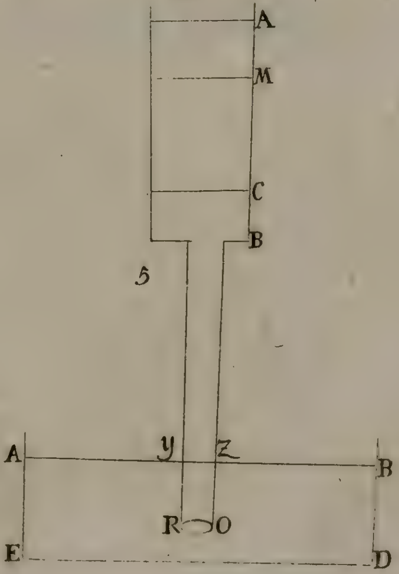
Dies Exempel iſt aus Belidors Architectura Hydraulica III Buch, III Cap. 911. §. genommen, woſelbſt aber außer den Querſchnitten des Stiefels, und der Saugröhre keine andre data angegeben ſind, als die größte Kolbenhöhe von der Oberfläche des Waſſers, welches das Saugwerk herauf ziehen ſoll = 18 Fuß, und die Höhe des Kolbenzuges = 2 Fuß. Die Tiefe, um welche die Saugröhre unter Waſſer ſteht, iſt hier 6 Fuß groß angenommen, daher kommen die Höhen über dem Waſſer mit den Belidorſchen überein. Belidor braucht nach ſeiner Theorie nicht mehr data, und nach derſelben wäre die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Saugröhre in dem Augenblick, da es die Höhe von 18 Fuß erreicht = 10, 2979 Fuß in einer Secunde, und die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel = $\frac{10,2979 \times 169}{1296}$ = 1, 34 Fuß, alſo 1 Fuß 4 Zoll. Nach der alten von H. Belidor getadelten Regel würden auf 28 Fuß für dieſe Geſchwindigkeit heraus kommen, welches alſo eine ungemein fehlerhafte Regel iſt. Wollte man aber nach der richtigen Formul des 22. §. $q = \frac{(A - b)vv - \frac{1}{2}vv^2}{b + \frac{m-n}{n}\beta + vv}$ die Geſchwindigkeit berechnen, womit das Waſſer den höchſten Kolbenſtand erreicht; ſo würde man 3, 18 Fuß finden. Hieraus ergiebt ſich, daß Belidor jene ſonſt gebräuchlich geweſene Regel für die Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Kolbens mit Recht tadle, weil ſich wirklich bey einer ſo groſſen Geſchwindigkeit des Kolbens der Raum des Kolbenzuges nicht ganz mit Waſſer würde anfüllen können. Seine eigene Regel giebt zwar auch eine unrichtige Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel. In Abſicht der andern Anwendung aber, welche er davon macht, um die Geſchwindigkeit des Kolbens zu finden, kömmt ſie der Sache ungemein viel näher. Sie giebt gewöhnlich die Geſchwindigkeit des Kolbens noch etwas kleiner als nöthig iſt, da ſie im Gegentheil nach der andern Regel ſehr viel zu groß würde gefunden werden. Wie ſehr übrigens beyde Regeln von der richtigen Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Waſſers abweichen, fällt am meiſten in die Augen, wenn man nach dem 25. §. die größte Geſchwindigkeit deſſelben berechnet, und die Höhe *vv*, um welche es ſteigen müßte, wenn es bis zu dieſer Geſchwindigkeit gelangen ſollte. Man findet dieſe größte Geſchwindigkeit im gegenwärtigen Exempel von 6, 14 Fuß in einer Secunde, und das Waſſer müßte 14, 375 Fuß hoch über den niedrigſten Kolbenſtand ſteigen, wenn es zu dieſer Geſchwindigkeit gelangen ſollte. Für dieſen einzigen Fall giebt die vormalige Regel die Geſchwindigkeit des Waſſers richtig, Belidors Regel aber giebt ſie viel zu klein.


a
A
M
L
C
N
B
V
W
X
y
z
O


A
2
X
B
y
z


A
G
B
C
γ
D
3
M
S
N
Q
g
P
b
c
a
F
R
K
H
∫
∂
ℐ
O


q
Q
p
A
G
B
C
γ
D
b
c
a
M
S
N
r
n
k
m
o
R
H
∫
∂
ℐ
K
O


A
M
C
B
5
A
y
z
B
R
O
E
D

Verſuch
eines
# evidenten Beweiſes
der
allgemeinen
# mechaniſchen Grundſätze.

von
W. J. G. Karſten.
1768.

Verſuch

eines evidenten Beweiſes der allgemeinen mechaniſchen Grundſätze.

Es ſcheinet faſt, daß es leichter ſey, die Gränzen ſolcher Wiſſenſchaften, dergleichen die phyſiſch-mathematiſchen in ihrem gegenwärtigen Zuſtande ſind, zu erweitern, als den Vortrag ihrer erſten Grundlehren recht evident zu machen. Man hat in der Mechanik ſeit Galiläi Zeiten ungemein groſſe Progreſſen gemacht, und dies iſt vornehmlich durch Hülfe der Differential- und Integralrechnung geſchehen. Indeſſen weis man, daß die Fundamental-Gleichung der ganzen Mechanik $dc = p\,dt$ dem H. Dan. Bernoulli noch nicht ſo erwieſen zu ſeyn ſchien, daß ſie verdiene in die Klaſſe nothwendiger Wahrheiten aufgenommen zu werden. Ich weis, daß dies groſſe Mathematiker veranlaſſet hat, Beweiſe zu ſuchen, wodurch die Nothwendigkeit dieſer Gleichung außer Zweifel geſetzt werden möchte, und ich geſtehe einem jeden der bisher bekannten Beweiſe ſein Gewicht zu. Mich hat unter allen, die ich geleſen habe, des H. Karſtners Beweis in ſeinen Anfangsgründen der höhern Mechanik am meiſten befriediget. Eben dieſer Karſtneriſche Vortrag einer Theorie, worüber ich ſchon damals, wie ſich das angeführte Buch erhielt, verſchiedentliche Unterſuchungen angeſtellet hatte, hat mich veranlaſſet, dieſelbe Unterſuchung aufs neue vorzunehmen.

2. §.

Es iſt ſo lange noch nicht, daß man angefangen hat, die Statik und Mechanik als beſondere Wiſſenſchaften abzuhandeln, und einer jeden derſelben ihre beſtimmten Gränzen zu ſetzen. Soviel mir bekannt iſt, haben die Herrn **de la Hire**, **Maclaurin**, und **Karſtner** die Geſetze des Gleichgewichts feſter Körper allererſt zur überzeugenden Richtigkeit gebracht, und das giebt der Statik ihre vorzüglichſte Schönheit, wenn man wie dieſe Männer alle Geſetze des Gleichgewichts aus dem Begrif der Preſſungen herleitet, ohne die Betrachtung von Zeit, Raum und Geſchwindigkeit im geringſten zu Hülfe zu nehmen. Ich habe den Verſuch gemacht, beym Vortrag der Theorie von den beſchleunigenden Kräften ein Verfahren anzubringen, das demjenigen ähnlich iſt, deſſen ſich obgedachte Geometer mit ſo glücklichem Erfolg bedienet haben, die Theorie vom Hebel zu beweiſen, und ich werde es in der folgenden Abhandlung der churfürſtlichen Akademie zur Prüfung vorlegen. Ich ſetze hiebey die Galiläiſche Theorie von dem freyen Fall ſchwerer Körper als bekannt voraus. Durch Betrachtung des Falles ſchwerer Körper lernt man am beſten alle diejenigen

gen Umſtände kennen, welche bey bewegenden Kräften und ihren Wirkungen erwogen werden müßen. Das Wort Kraft iſt ſo ſehr zweydeutig und wird von vielen Schriftſtellern ſo ſehr unbeſtimmt gebraucht, daß es nicht zu verwundern iſt, wenn dies zu allerhand Verwirrungen Anlaß gegeben hat.

Gleichförmig beſchleunigende Kräfte.

3. §.

Es ſey AB die Verticallinie, worinn eine ſchwere Maſſe, die hier als ein Punct betrachtet wird, frey herab fällt, und dieſer Punct falle in der erſten Secunde von A bis C. Setzt man nun $AC = g$, ſo iſt am Ende der erſten Secunde des Puncts Geſchwindigkeit $= 2g$. Man iſt gewohnt ſo zu reden, die Schwere habe den Punct C während der erſten Secunde die Geſchwindigkeit 2 g mitgetheilt, und dieſe Redensart iſt der Sache ſehr wohl angemeſſen. Wenn nämlich die Schwere am Ende der erſten Secunde zu wirken aufhörte, ſo würde der Punct in der zweyten Secunde den Weg $= 2g$ vermöge ſeiner Trägheit gleichförmig zurück legen. Die Schwere hat den Punct in dieſen Zuſtand der Bewegung verſetzt, denn wenn ſie gar nicht gewirkt hätte; ſo wäre der Punct in dem Zuſtand der Ruhe geblieben.

4. §.

Von eben dieſer Wirkung der Schwere rührt es her, daß die bewegte Maſſe in der erſten Secunde um den Weg $AC = g$ fortrückt. Zwar hat die Schwere dieſe Maſſe eigentlich nicht durch den ganzen Weg AC unmittelbar fortgeſchoben, ſondern ein Theil dieſes Weges iſt von dieſer Maſſe, wegen ihrer Trägheit zurück gelegt worden. Hätte die Schwere zu wirken aufgehört, nachdem die erſte Helfte der Secunde verfloſſen war, ſo hätte die Maſſe ſchon die Geſchwindigkeit g gehabt, ſie hätte in der erſten Helfte den Weg $\frac{1}{4} g$ und in der zweyten Helfte den Weg $\frac{1}{2} g$ zurückgelegt. Daher würde eine beſondre Rechnung nöthig ſeyn, wenn man das, was von der Schwere unmittelbar herrührt, von demjenigen unterſcheiden wollte, was der Trägheit zukömmt. Allein es iſt bey dieſer Unterſuchung nicht nöthig ſoweit zu gehen. Die Maſſe würde gar nicht von der Stelle gekommen ſeyn, wenn die Schwere gar nicht gewirkt hätte, und eben die Maſſe würde auch in der erſten Secunde nicht den ganzen Weg AC zurück gelegt haben, wenn die Schwere nicht während dieſer ganzen Secunde ununterbrochen gewirkt hätte. Demnach rührt es doch von der Schwere her, nicht allein, daß die Maſſe in Bewegung kömmt, ſondern auch grade dieſen und nicht einen kleinern Weg in der erſten Secunde zurück legt. Und in dieſer Bedeutung iſt es nicht unrichtig geredet, wenn man ſagt, die Schwere treibe die Maſſe in der erſten Secunde um den Weg AC fort. In eben der Bedeutung ſoll demnach dieſe Redensart in der Folge gebraucht werden.

5. §.

Die Maſſe falle ferner in zwo Secunden bis D, ſo iſt $AD = 4 g$, und $CD = 3 g$; wenn man alſo $CE = 2 g$ nimmt, ſo iſt dies der Weg, um welchen die Maſſe allein wegen der Trägheit fortgerückt wäre, wenn die Schwere während der zweyten Secunde nicht gewirkt hätte. Aber wegen fortdaurender Wirkung der Schwere rückt die Maſſe in der zweyten Secunde um das Stück $ED = g = AC$ weiter. Fällt eben die Maſſe in drey Secunden bis F, ſo iſt $F = 9 g$ und $DF = 5 g$. Ohne Zuthun der Schwere wäre die Maſſe in der dritten Secunde um das Stück

DG = 4 g weiter gerückt, wegen der Schwere aber geht die Maſſe außerdem noch um das Stück GF = ED = AC weiter. Eben ſo geht es in jeder folgenden Secunde. Das Stück, um welches die Maſſe wegen fortdaurender Wirkung der Schwere jedesmal weiter rückt, als ſie allein wegen der Trägheit gerückt wäre, iſt immer von einerley Größe, allemal ſo groß, als der Weg, durch welchen die Maſſe in der erſten Secunde fällt.

6. §.

Man muß demnach zweyerley Wirkung der Schwere unterſcheiden. Sie bewegt einen Körper entweder wirklich, oder ſie drückt ihn gegen einen Widerſtand, der die Bewegung hemmet. Beyde Wirkungen ſind nur wegen der äußern Umſtände unterſchieden, unter welchen ſich der Körper befindet. Denn eigentlich iſt dasjenige, was den Körper bewegt, völlig einerley mit dem, was ihn gegen den Widerſtand preßt, der die Bewegung aufhält: und wenn der Körper wirklich ſinkt, ſo wirkt die Schwere in jedem Punkt ſeines Weges eben ſo auf ihn, wie ſie alsdenn thut, wenn der Körper auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Eben das, was wir im letzten Fall den Druck nennen, theilt der Maſſe, nachdem der Widerſtand gehoben iſt, in einer gewiſſen Zeit eine gewiſſe Geſchwindigkeit mit, indem ſie die Maſſe von einer gewiſſen Höhe herab treibt. Dieſe letztere Wirkung der Schwere heißt ihre **Beſchleunigung**, ſo wie jene Wirkung am füglichſten ihre **Preſſung**, oder ihr **Druck** heißt. Will man **beſchleunigende Kraft** der Schwere, **drückende Kraft** der Schwere ſagen, ſo hat man ſeine Freyheit, nur muß man nicht vergeſſen, daß beydes völlig einerley Kraft ſey, die nur deswegen verſchiedene Nämen führt, weil ihre Wirkungen auf dieſe beyden verſchiedenen Arten in die Summe fallen.

7. §.

Die Schwere theilt jeder frey herab fallenden Maſſe in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten mit, und das Stück des Weges, durch welchen die Maſſe im folgenden Zeittheilchen weiter rückt, als allein wegen der Trägheit geſchehen wäre, iſt allemal eben ſo groß, als es im vorhergehenden eben ſo groſſen Zeittheilchen war. In dieſem Stück iſt nicht jede andre bewegende Kraft der Schwere ähnlich. Es giebt Kräfte, die der bewegten Maſſe im zweyten Zeittheilchen mehr oder weniger Geſchwindigkeit als im erſten eben ſo groſſen Zeittheilchen mittheilen. Dieſe heißen **ungleichförmig wirkende** oder **veränderliche Kräfte**, ſo wie im Gegentheil die Schwere nach der galiläiſchen Hypotheſe eine **beſtändige**, oder **gleichförmig beſchleunigende Kraft** iſt.

8. §.

Wenn nun eine andre Kraft V, wie die Schwere eine Maſſe gleichförmig beſchleuniget, ſo wird die Bewegung dieſer Maſſe nach völlig ähnlichen Geſetzen, wie die Bewegung frey fallender ſchwerer Körper erfolgen; nur mit dem Unterſchied, daß die Kraft V ihrer Maſſe in einer gewiſſen Zeit, z. E. einer Secunde eine größere oder kleinere Geſchwindigkeit mittheilt, als ihr die natürliche Schwere in eben der Zeit mittheilen würde. Man nehme für dieſe Zeit eine Secunde an, eine ſchwere Maſſe falle in der erſten Secunde von der Höhe g, und erlange die Geſchwindigkeit k, in der Zeit t aber die Geſchwindigkeit c. Eine eben ſo groſſe Maſſe aber gehe von der Kraft V getrieben durch den Weg G in der erſten Secunde fort, und erlange die Geſchwindigkeit K, in der Zeit t aber die Geſchwindigkeit C; ſo iſt $c = kt = 2gt$, und $C = Kt = 2Gt$. **Nun verhalten** ſich die

Beſchleunigungen zwoer Kräfte ohne Zweifel wie die Geſchwindigkeiten, die ſie gleichen Maſſen in gleichen Zeiten mittheilen. Wenn demnach die Beſchleunigung der Schwere $= \alpha$, die Beſchleunigung der Kraft V aber $= A$ iſt, ſo hat man $\alpha : A = 2gt : 2Gt = g : G$, weil t einerley iſt. Sind nun s und S die Wege, welche die Maſſe entweder von der Schwere oder der Kraft V getrieben in der Zeit t durchläuft; ſo iſt $s = gtt$, $S = Gtt$, alſo auch $s : S = g : G$. **Daher verhalten ſich die Beſchleunigungen der Schwere und der Kraft V, wie die Wege, durch welche einerley Maſſe entweder von der Schwere, oder der Kraft V getrieben, in einerley Zeit fortrücken würde.**

9. §.

Dieſe Vergleichung der Beſchleunigungen zwoer Kräfte hat ſehr viele Aehnlichkeit mit der Vergleichung der Geſchwindigkeiten zwoer Maſſen, die ſich gleichförmig bewegen. Man hat von der Beſchleunigung einer bewegenden Kraft einen beſtimmten Begrif, wenn man weis, wie weit eine gegebene Maſſe wegen der Wirkung dieſer Kraft in einer beſtimmten Zeit, z. E. einer Secunde fortrückt. Dieſer zurückgelegte Weg iſt eigentlich die Beſchleunigung ſelbſt nicht. Allein wenn die Acceleration einer ſolchen Kraft = 1 geſetzt wird, vermöge welcher eine Maſſe in der erſten Secunde einen Fuß fortgetrieben wird; ſo wird die Acceleration einer andern Kraft 2mal, 3mal größer ſeyn, u. ſ. f. welche dieſelbe Maſſe in einer Secunde 2 Fuß, 3 Fuß weit forttreibt. Deswegen werde ich hier durch die **Beſchleunigung** einer Kraft V, die eine gegebene Maſſe wie die Schwere gleichförmig beſchleuniget, den Weg verſtehen, durch welchen dieſe Maſſe, wegen Wirkung der Kraft V in einer Secunde fortrückt.

Wenn alſo G die Beſchleunigung iſt, und s der in der Zeit t von der Maſſe zurück gelegte Weg, ſo hat man $G = \frac{s}{tt}$.

10. §.

Dafern die Bewegung einer Maſſe A, worauf die Kraft V wirkt, von einem Widerſtande gehemmet wird, ſo wird die Kraft V dieſe Maſſe gegen den Widerſtand auf eine ähnliche Art preſſen, wie die Schwere dieſe Maſſe gegen einen ſolchen Widerſtand preſſen würde. Dieſer Druck ſey nun ſo ſtark als er wolle, ſo wird man ihn doch allemal mit einem gewiſſen Gewicht vergleichen können, d. i. mit dem Druck einer gewiſſen ſchweren Maſſe, die auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Es wird ſich ein Gewicht angeben laſſen, das die Tafel eben ſo ſtark preßt.

11. §.

Eine Kraft V treibt die Maſſe A nach der Richtung Aα, und eine andre Kraft W treibt eben die Maſſe A zugleich nach der grade entgegen geſetzten Richtung A$\mathring{\alpha}$. **Wenn nun die Beſchleunigungen beyder Kräfte gleich ſind, ſo bleibt die Maſſe A in Ruhe.** Denn beyde Kräfte würden der Maſſe A in gleichen Zeiten gleiche und entgegen geſetzte Geſchwindigkeiten mittheilen, alſo kann A gar nicht in Bewegung kommen.

Dafern alſo zwo Kräfte gleiche Maſſen gleich ſtark beſchleunigen, ſo werden ſie dieſe Maſſen gegen einen Widerſtand, der die Bewegung gleich im Anfang hemmet, gleich ſtark preſſen. Der Widerſtand thut daſſelbe, was jede dieſer Kräfte thun würde, wenn ſie der andern entgegen geſetzt wäre. Es iſt aber offenbar, daß dieſe Kräfte gegen einander gleich ſtark drücken.

12. §.

12. §.

Ungleiche Maſſen werden von der Schwere gegen einen Widerſtand ungleich ſtark gepreßt, und zwar ſo, daß der Druck den Maſſen proportional iſt, ob ſie gleich bey wirklich erfolgter Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten erlangen. Auch dies gilt allgemeiner von jeder Kraft, die gleiche Maſſen gleich ſtark beſchleuniget. **Wenn auf ungleiche Maſſen ſolche Kräfte wirken, und die Bewegung durch einen Widerſtand gehemmet wird, ſo verhalten ſich die Preſſungen, wie die Maſſen.** Dieſe ungleichen Maſſen aber, wenn ſie nicht gehindert werden, erlangen in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten.

13. §.

Wenn die Beſchleunigungen der Kräfte V und W nach den Richtungen A *a* und A *α* im 11. §. nicht gleich ſind, wenn V der Maſſe A in einer Secunde oder jeder andern Zeit eine größere Geſchwindigkeit mittheilt, als W eben der Maſſe in eben der Zeit mitzutheilen vermögend iſt, **ſo kann A nicht in Ruhe bleiben.** Die Kraft W vermindert nur die von V gewirkte Geſchwindigkeit, und die Maſſe A erlangt in jedem Augenblick eine Geſchwindigkeit, die ſo groß iſt, als der Ueberſchuß der größern Geſchwindigkeit über die kleinere.

Dieſe Kräfte alſo werden die Maſſe A ungleich ſtark preſſen. Und hieraus folgt, wie im 11 §., **wenn zwo Kräfte gleiche Maſſen ungleich ſtark beſchleunigen, ſo preſſen ſie dieſe Maſſen gegen einen Widerſtand, der die Bewegung hemmet, ungleich ſtark, und zwar diejenige ſtärker, welche ſtärker beſchleuniget.**

14. §.

Wenn demnach die Maſſe A von zwoen Kräften nach entgegen geſetzten Richtungen getrieben wird, und die Maſſe bleibt in Ruhe; oder welches einerley iſt: wenn zwo Kräfte die Maſſe A nach entgegen geſetzten Richtungen gleich ſtark drücken, ſo ſind die Accelerationen beyder Kräfte gleich groß, d. i. die Geſchwindigkeiten würden gleich ſeyn, die jede Kraft für ſich dieſer Maſſe in einerley Zeit mittheilen würde: auch würden die Räume gleich ſeyn, durch welche die Maſſe A in einerley Zeit entweder nach der einen oder der andern Richtung fortgehen würde.

Es fließt hieraus die fernere Folge: wenn zwo Kräfte gleiche Maſſen gleich ſtark gegen einen Widerſtand preſſen, ſo theilen ſie dieſen Maſſen gleiche Accelerationen mit, wenn der Widerſtand gehoben wird.

Wenn aber zwo Kräfte gleiche Maſſen ungleich ſtark drücken, ſo wird der ſtärkere Druck ſtärker, der ſchwächere weniger beſchleunigen.

15. §.

Der Satz des 12. §. iſt auch umgekehrt wahr. Wenn zwo Maſſen ungleich ſind, auf beyde aber ſolche Kräfte drücken, die den Maſſen proportional ſind, ſo daß gleiche Theilchen dieſer Maſſen gleiche Preſſungen leiden, ſo erlangen dieſe Maſſen, wenn ſie nicht gehindert werden, in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten.

16. §.

Es ſey DE eine ebene horizontale Tafel, auf derſelben liegt die Maſſe A, und ihr Gewicht iſt = P. Würde die Tafel plötzlich ſich weggenommen, ſo würde A in der erſten Secunde um die Tiefe $Aa = g = 15,625$ Rh. Fuß ſinken, und in a die Geſchwindigkeit $k = 2g$ erlangt haben. Es ſey B eine andre Maſſe ohne Schwere, die der Maſſe A gleich iſt. Eine Kraft V drücke dieſe Maſſe ebenfalls ſenkrecht gegen DE, ſo muß B gleichfalls vertical herunter ſinken, wenn DE weggenommen wird. Wenn nun V die Maſſe B gleichförmig beſchleuniget, B aber am Ende der erſten Secunde bis b kömmt, und daſelbſt die Geſchwindigkeit $c = 2k$ erlangt, ſo iſt $Bb = 2Aa$ (8. §.) $= 2g$. Aber in eben dieſem Fall iſt auch $V = 2P$. Dies letztere will ſo viel ſagen: **So lange die horizontale Tafel *DE* die Bewegung hemmet, wird *V* die Maſſe *B* gegen *DE* doppelt ſo ſtark drücken, als die natürliche Schwere eine eben ſo groſſe Maſſe A gegen gegen *DE* drückt.**

Beweis. Ein Druck, der $= P$ wäre, aber A nach entgegen geſetzter Richtung $A\alpha$ preßte, würde A in Ruhe erhalten. Aber ein Druck $= P$, der B nach entgegen geſetzter Richtung $B\beta$ preßt, hält B nicht in Ruhe. Er würde der Maſſe B in der Zeit t die Geſchwindigkeit $c - k$ (13. §.) $= k$ mittheilen. Nun wird B gegen DE mit einer Kraft $= V - P$ gepreßt, und es iſt ſoviel, als wenn B das Gewicht $V - P$ hätte. Weil dieſer Druck der Maſſe B in der Zeit t nach gehobenem Widerſtande die Geſchwindigkeit k, und P einer eben ſo groſſen Maſſe A in eben der Zeit eben die Geſchwindigkeit mittheilt; ſo iſt $V - P = P$, (11. §.) folglich $V = 2P$.

17. §.

Wenn die übrigen Vorausſetzungen bleiben, aber *B* am Ende der erſten Secunde die Geſchwindigkeit $3k$ erlangte, ſo iſt $V = 3P$.

Beweis. Ein Druck $= P$, der die Maſſe B nach entgegen geſetzter Richtung $B\beta$ treibt, vermindert wie vorhin den Druck V, ſo daß B nach Bb nur mit der Gewalt $V - P$ gepreßt wird. Eben die Maſſe B aber erlangt in der Zeit t die Geſchwindigkeit $3k - k$ (13. §.) $= 2k$, alſo iſt $V - P = 2P$ (16. §.) und $V = 3P$.

18. §.

Man ſiehet leicht, daß aus dieſem Satz wieder folge, wenn B am Ende der erſten Secunde die Geſchwindigkeit $4k$ erlangte, daß $V = 4P$ ſeyn müßte. Ueberhaupt aber erhellet daraus die Richtigkeit dieſes Satzes: **Dafern $V = nP$ ſeyn muß, wenn B von V getrieben die Geſchwindigkeit nk erlangte; ſo muß $V = (n+1)P$ ſeyn, wenn B die Geſchwindigkeit $(n+1)k$ in einer Secunde erlangen würde.**

Es iſt alſo allgemein wahr: wenn V der Maſſe B in der erſten Secunde die Geſchwindigkeit nk mittheilt; ſo iſt $V = nP$, oder, wenn der Kraft V Beſchleunigung $= ng$ iſt, ſo iſt $V = nP$.

19. §.

Wenn eine Kraft V die Maſſe B gleichförmig beſchleuniget, und das Gewicht einer ſchweren eben ſo groſſen Maſſe A iſt $= P$; ſo verhält ſich $V : P$ wie die Beſchleunigung der Kraft V zur Beſchleunigung der Schwere.

Beweis. Die Beſchleunigung der Schwere ſey, wie bisher, $= g$ und die Beſchleunigung der Kraft V ſey $= G$. Verhält ſich nun $G : g = m : n$, ſo daß m und n ein paar ganze Zahlen ſind, ſo iſt $mg = nG$. Wenn aber eine Kraft X eine Maſſe $= A$ bewegt, und ihre Beſchleunigung $= mg$ iſt, ſo iſt $X = mP$ (18. §.)

18. §.) Und wenn eine Kraft Y eine eben ſo groſſe Maſſe B bewegt, ihre Beſchleunigung aber $= n\,G$ iſt; ſo iſt $Y = n\,V$. (18. §.) Da nun $m\,g = n\,G$ war, ſo wird $X = Y$ (11. §.) folglich $m\,P = n\,V$, und $V : P = m : n$, oder $V : P = G : g$. So erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn das Verhältniß $G : g$ ein Rationalverhältniß iſt. Daraus läßt ſich aber leicht ſchließen, daß eben daſſelbe noch wahr ſeyn müſſe, wenn gleich $G : g$ ein Irrationalverhältniß wäre.

Es ſey $G : g > m : n$ und $G : g < m + 1 : n$, ſo werden ſich dieſe Gränzen, zwiſchen welchen das Verhältniß $G : g$ fällt, nach Gefallen verengern laſſen. Nun mag man dieſe Gränzen einander ſo nahe rücken, als man will, ſo wird allemal das Verhältniß $V : P$ zwiſchen eben den Gränzen enthalten ſeyn. Iſt nämlich $G > \frac{m}{n}\,g$ und $G < \frac{m+1}{n}\,g$, ſo iſt zugleich $V > \frac{m}{n}\,P$ und $V < \frac{m+1}{n}\,P$, wie groß auch m und n genommen werden. Denn vermöge des geführten Beweiſes ſind $\frac{m}{n}\,g$ und $\frac{m+1}{n}\,g$ die Beſchleunigungen der Kräfte $\frac{m}{n}\,P$ und $\frac{m+1}{n}\,P$. Wäre aber einmal $V < \frac{m}{n}\,P$, ſo wäre $G < \frac{m}{n}\,g$, und wenn einmal $V > \frac{m+1}{n}\,P$ wäre, ſo müßte $G > \frac{m+1}{n}\,g$ ſeyn (14. §.) beydes gegen die Vorausſetzung. Alſo iſt auch in dieſem Fall $G : g = V : P$.

20. §.

Die Proportion $V : P = G : g$ läßt ſich auch ſo ausdrücken $\frac{V}{P} : 1 = G : g$. Wenn man demnach die Beſchleunigung der Schwere als die Einheit betrachtet, und mit derſelben die Beſchleunigung einer jeden andern Kraft vergleicht, ſo kann man $G = \frac{V}{P}$ ſetzen, und dies giebt die gewöhnliche Regel.

Man findet die Beſchleunigung einer Kraft *V*, welche die Maſſe *B* bewegt, wenn man dieſe Kraft durch das Gewicht einer Maſſe, die eben ſo groß als *B* iſt, dividirt.

Dieſer Quotient giebt alſo nicht eigentlich die Beſchleunigung der Kraft V in dem Verſtande des 9. §, er drückt vielmehr nur aus, wieviel mal die Beſchleunigung der Kraft V größer oder kleiner als die Beſchleunigung der Schwere ſey.

Weil die Maſſen verſchiedener Körper ſich wie ihre Gewichte verhalten, und man die Größe der Maſſe eines Körpers nicht anders als dadurch ausdrücken kann, daß man anzeigt, wie groß ſein Gewicht nahe an der Erdfläche ſeyn würde; ſo drückt man die erwieſene Regel auch auf die Art aus: **man müße die Stärke des Drucks *V* durch die Maſſe *B* dividiren.** Man kann der Kürze wegen dieſe Sprache beybehalten, in der That aber muß nothwendig das Gewicht der Maſſe B verſtanden werden; und wenn man die Größe der Maſſe B auf andre Art als durch ihr Gewicht ausdrücken könnte, und wirklich ausdrückte, ſo würde $\frac{V}{B}$ die Beſchleunigung der Kraft V nicht ausdrücken, es wäre denn, daß man ſtatt V ebenfalls eine Maſſe ſetzte, die das natürliche Gewicht V hätte. Wenn V durch ein eben ſo groſſes Gewicht P ausgedrückt iſt, und M das Gewicht der Maſſe B an der Oberfläche der Erde ſeyn würde, ſo iſt bekannt, daß P die abſolute Größe der bewegenden Kraft V, und $\frac{P}{M}$ ihre Beſchleunigungsgröße genannt werde.

21. §.

Die abſolute Größe der beſtändigen Kraft P iſt gegeben, welche die Maſſe M treibt, man ſucht die Größe des Weges s, welchen M in der Zeit t zurück leget, nebſt ihrer Geſchwindigkeit c nach verfloſſener Zeit t.

Aufl. Wenn G die Beſchleunigung der Kraft P iſt, ſo hat man $s = G\,t\,t$, (9. §.) und $G = \frac{gP}{M}$ (20. §.) alſo $s = \frac{gP}{M}\,tt$. Ferner iſt $c = 2\,G\,t = \frac{2gP}{M}\,t$.

Ungleichförmig beſchleunigende Kräfte.

22. §.

Es ſey die Maſſe M, welche die veränderliche Kraft P treibt, in der Zeit t durch den Weg AP fortgegangen, und rücke in dem folgenden Zeittheilchen T um das Stück $P\pi$ weiter. Dafern nun die Kraft P in dem Augenblick, da die Maſſe M in P ankömmt, überall aufhörte zu wirken, ſo würde dennoch die Maſſe M einen Theil PQ dieſes Weges mit der in P ſchon erlangten Geſchwindigkeit gleichförmig durchlaufen haben, und es iſt $Q\pi$ eigentlich der Weg, den die Maſſe wegen fortdaurender Wirkung der Kraft in der Zeit T noch zurück leget. Wäre die Kraft P während der ganzen Zeit T von eben der Größe geblieben, die ſie im Anfang der Zeit T, oder am Ende der Zeit t hatte, ſo wäre die Maſſe M in dieſer Zeit zwar weiter als Q bis p vorgerückt, und dann wäre $\frac{Qp}{TT}$ ihre Beſchleunigung in dem Verſtande des 9. §. Allein es iſt nun Qp nicht mit $Q\pi$ einerley, weil ſich P während der Zeit T verändert hat. Dafern die Kraft P in der Zeit T größer geworden iſt, ſo iſt $Q\pi > Qp$, widrigenfalls aber $Q\pi < Qp$. So wie nun bey der ungleichförmigen Bewegung durch die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verſtanden wird, den die Maſſe in der folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn die Bewegung von jetzt an ſich nicht weiter änderte, und von dieſem Augenblick an der Körper bloß vermöge ſeiner Trägheit fortgienge; ſo ſoll hier durch die **Beſchleunigung einer veränderlichen Kraft** P für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verſtanden werden, durch welchen die Maſſe in der folgenden Secunde weiter als wegen der Trägheit allein fortrücken würde, wenn während dieſer Zeitſecunde die Kraft P eben ſo groß bliebe, als ſie im Anfang derſelben war. In dieſem Verſtande wäre alſo $\frac{Qp}{TT}$ die Beſchleunigung der veränderlichen Kraft P für den letzten Augenblick der Zeit t.

23. §.

Es iſt eine Gleichung zwiſchen t und s gegeben, wenn s den Weg bedeutet, den die Maſſe M, die von der veränderlichen Kraft P getrieben wird, in der Zeit t zurück leget: man ſucht die Geſchwindigkeit der Maſſe M nebſt der Beſchleunigung der Kraft P für jede gegebene Zeit t.

Aufl. Es ſey $AP = s$ der in der Zeit t zurück gelegte Weg, und in dem folgenden Zeittheilchen $\triangle t$ ſey M von P nach π gerückt, ſo iſt s um das Stück $P\pi = \triangle s$ angewachſen, indem die Zeit t um $\triangle t$ größer geworden iſt. Die in P erlangte Geſchwindigkeit ſey $= c$, und die in π erlangte Geſchwindigkeit $= c'$ ſo iſt $c' > c$. Wenn nun PQ der Weg iſt, den die Maſſe M in der

Zeit $\triangle t$ mit der Geſchwindigkeit c gleichförmig zurück legen würde, ſo iſt $c = \frac{PQ}{\triangle t}$. Aber $PQ < P\pi$ alſo iſt $c < \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Hätte die Maſſe M in P ſchon die Geſchwindigkeit c' und wäre in der Zeit t von P nach q gleichförmig fortgegangen, ſo müßte $Pq > P\pi$ ſeyn, und es wäre $c' = \frac{Pq}{\triangle t}$, alſo $c' > \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Zwiſchen dieſen Gränzen c und c' iſt alſo $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ allemal enthalten, wie klein auch $\triangle t$ genommen wird. Beyde Gränzen nähern ſich einander deſto mehr, je mehr $\triangle t$ abnimmt, und werden gleich groß, wenn $\triangle t$ verſchwindet. Folglich wird $c = \frac{ds}{dt}$.

In dem Augenblick, da die Maſſe M in P ankömmt, ſey die Kraft, welche dieſe Maſſe beſchleuniget, = P, und weil ſich dieſe Kraft, während der Zeit $\triangle t$ ändert, ſo ſey ſie = P am Ende der Zeit $\triangle t$, in dem Augenblick, da M in π ankömmt. Wenn nun dieſe Kraft während der Zeit $\triangle t$ keine Aenderung litte, ſo würde die Geſchwindigkeit c in der Zeit $\triangle t$ um das Stück $\frac{2gP}{M}\triangle t$ wachſen (21. §.). Nimmt man aber an, daß P während der Zeit $\triangle t$ wächſt, alſo $P' > P$ iſt, ſo erhellet, daß $\frac{2gP}{M}\triangle t$ kleiner ſey, als dasjenige Stück, um welches c in der Zeit $\triangle t$ wächſt. Wird nun c' aus c, indem $t + \triangle t$ aus t wird, ſo iſt $c' - c = \triangle c$ eigentlich dasjenige, um welches c während der Zeit $\triangle t$ gröſſer wird, und es iſt $\triangle c > \frac{2gP}{M}\triangle t$, oder $\frac{\triangle c}{\triangle t} > \frac{2gP}{M}$. Wäre die bewegende Kraft im Anfange der Zeit $\triangle t$ ſchon = P' geweſen, und hätte ſich während dieſer Zeit $\triangle t$ nicht geändert, ſo wäre c um das Stück $\frac{2gP'}{M}\Delta t$ gewachſen, und es erhellet, wie vorhin, daß $\Delta c < \frac{2gP'}{M}\Delta t$ oder $\frac{\Delta c}{\Delta t} < \frac{2gP'}{M}$ ſey. Beyde Gränzen, zwiſchen welchen das Verhältniß $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ fällt, nähern ſich einander, wenn Δt abnimmt, und gehen zuſammen, wenn Δt verſchwindet. Daher iſt des Verhältniſſes $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ Gränze $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$, und die geſuchte Beſchleunigung $\frac{P}{M} = \frac{dc}{2g\,dt}$.

Wenn $P' < P$ wäre, alſo P während der Zeit Δt abnehme, ſo würde ſich in dieſen Schlüſſen nichts weiter als der Umſtand ändern, daß $\Delta c < \frac{2gP}{M}\Delta t$ und $\Delta c > \frac{2gP'}{M}\Delta t$ ſeyn müßte. Uebrigens würde daraus eben ſo wie vorhin $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$ folgen.

Vom Maas der Kräfte.

24. §.

Wenn es wahr iſt, daß auf die Gleichungen des 21 und 23 §. die ganze Mechanik beruhet, ſo muß auch die Frage, **wie ein paar bewegende Kräfte ſich gegen einander verhalten?** aus den bisher vorgetragenen Gründen zulänglich beantwortet werden können. Sind die Kräfte veränderlich, ſo kann man nur fragen, wie ſie ſich für einen gegebenen Zeitpunct gegen einander verhalten, und denn iſt es eben ſoviel, als wenn man ein paar beſtändige Kräfte mit einander vergleicht, ſo daß die ganze

Vergleichung aus dem 21. §. folgt. Es iſt ſoviel, als ob man fragt, wie ſtark die Kräfte in dieſem Augenblick die bewegte Maſſe gegen einen Widerſtand, der von jetzt an die Bewegung hemmete, preſſen würden, wenn der Maſſe in eben dem Augenblick alle ſchon erlangte Geſchwindigkeit genommen wäre. Dieſe Preſſungen verhalten ſich, wie die Bewegungen, ſo die Kräfte ihren Maſſen in gleichen Zeiten mittheilen würden. Weil nämlich $Mc = 2gPt$, ſo verhält ſich P wie Mc, wenn t einerley iſt, und ich ſehe nicht ab, daß man einer weitern Vergleichung bewegender Kräfte in der Mechanik bedürfe. Der bekannte ehedem über das Maas der Kräfte ſo hitzig geführte Streit hat auf die Wiſſenſchaft ſelbſt nach ihrem gegenwärtigen Zuſtande ſo wenig Einfluß, daß ich kein Wort davon erwähnen würde, wenn nicht bisher noch faſt in allen Handbüchern der Mechanik und Phyſik die Sache berührt würde. Eben daher werde ich mich auch in keine weitläuftige Prüfung der gegenſeitigen Gründe einlaſſen, ſondern nur einige allgemeine Erinnerungen beyfügen, die der Sache vieleicht mehr Licht geben werden, als ich bey den meiſten hieher gehörigen Schriftſtellern finde.

25. §.

Weil ein jeder bewegter Körper eine Urſache neuer Bewegungen andrer Körper werden, und ihre Bewegungen auf mancherley Art verändern kann; ſo hat man faſt beſtändig dieſe Sache ſo betrachtet, als wenn demſelben eine beſondere Kraft eigen wäre. Man hielt davor, dieſe Kraft des Körpers ſey deſto größer, je größer ſeine Maſſe und Geſchwindigkeit iſt, und ſetzte daher feſt, daß die Kräfte ſolcher Körper ſich wie die Producte der Maſſen in ihre Geſchwindigkeiten verhalten müſſen. Man verglich alſo die ſogenannten Kräfte zweener Körper deren Maſſen

M, *m*, und Geſchwindigkeiten C, *c*, ſind ſo, wie nach aller Geſtändniß ihre Bewegungen verglichen werden müſſen, und ſetzte das Verhältniß dieſer Kräfte = MC : *mc*.

26. §.

Hiebey iſt nun gleich anfangs zu bemerken. daß man ſchwerlich deutlich werde anzugeben wiſſen, was das Wort **Kraft** hier recht heißen ſolle. Sieht man die Geſchwindigkeiten C, *c*, womit die Maſſen M, *m*, jetzt fortgehen, als ſolche an, die von bewegenden Kräften in gleichen Zeiten den Maſſen mitgetheilt ſind, ſo hat es ſeine Richtigkeit, daß dieſe bewegenden Kräfte ſich wie MC : *mc* verhalten. Allein dies ſind alsdenn nicht **Kräfte der bewegten Maſſen**, ſie müſſen wenigſtens in Gedanken davon unterſchieden, und die Maſſen als der leidende Theil betrachtet werden. Man wird antworten: eben dadurch, daß die Maſſe in Bewegung geſetzt worden, ſey ihr auch eine Kraft mitgetheilt, und dieſe in der Maſſe nun hervorgebrachte Kraft ſey dem MC proportional. In der That aber gründet ſich dieſe Vorſtellung auf einen ganz verwirrten Begrif deſſen, was in der Mechanik eigentlich Kraft heiſſen ſoll. Sie iſt von Redensarten des gemeinen Lebens hergenommen, die nicht allemal der Sache ſelbſt genau angemeſſen ſind. Vermöge der ſonſt allgemein angenommenen **erſten** Grundſätze der Mechanik kann man einer Maſſe, die mit der Geſchwindigkeit C gleichförmig fortgehet, ſo wenig eine eigentlich ſogenannte bewegende Kraft zuſchreiben, ſo wenig man ſie der ruhenden Maſſe beylegt. Will man aber der bewegten Maſſe deßwegen eine Kraft zuſchreiben, die noch in etwas anders, als in der bloſſen Trägheit beſtehen ſoll, weil ſie den Zuſtand der Bewegung andrer Körper ändern kann, ſo muß man aus eben der Urſache der ruhenden Maſſe gleichfalls eine Kraft beylegen.

Denn die ruhende Maſſe kann ſo gut den Zuſtand der Bewegung andrer Maſſen ändern, als es die bewegte thun kann. Zwar redet man im gemeinen Leben ſo, die bewegte Maſſe M ſtoſſe die ruhende N fort, oder M ſetze N in Bewegung: allein wenn man die Sache nach richtigen Begriffen beurtheilen will, ſo muß man wegen dieſer Redensarten nicht in der Maſſe M allein die Urſache der in N hervorgebrachten Bewegung ſuchen, ſondern vielmehr in beyden zugleich, weil beyde undurchdringlich ſind. Und warum ſoll denn die ruhende Maſſe N nicht auch eine Kraft haben, da ſie doch die Bewegung der Maſſe M verändert, und eben das, was die Schwere thut, wenn ein Körper aufwärts geworfen wird. Wäre N, wie der geometriſche Raum durchdringlich, ſo wäre N nicht in Bewegung gekommen, und M hätte ſeine Bewegung ungeändert behalten. H. Euler macht in den Memoires de Berlin. A. 1745. p. 21. u. f. eben dieſe Erinnerungen.

27. §.

Wer inzwiſchen MC bewegende Kraft nennen will, der hat ſeine Freyheit, er nennt das **bewegende Kraft**, was eigentlich **Bewegung** heißen ſollte. Man hätte vieleicht dieſe Redensart, wie manche andre ebenfalls nicht ſo ganz genau richtige, in der Mechanik beybehalten, wenn nicht der H. v. Leibniz darauf verfallen wäre, dieſe ſogenannten bewegende Kräfte auf eine andre Art zu vergleichen, die ſich aber doch noch immer auf die Vorſtellung gründet, als ob man einem bewegten Körper vorzüglich eine bewegende Kraft zuſchreiben müſſe, die ein ruhender nicht hat. Man weis, daß nach ſeiner Lehre das Verhältniß der Kräfte zweener bewegter Körper $= MC^2 : mc^2$ ſeyn ſoll, und ſein Beweis, womit er in den A. E. des Jahrs 1686. dies zu beſtättigen ſuchte, iſt bekannt. Er ſieht die Höhen, auf welche vertical aufwärts geworfene Körper ſteigen, als die Wirkungen, und die bewegten Körper als die Urſachen dieſes Steigens auf eine gewiſſe Höhe an. Bey gleichen Maſſen ſollen ſich die Kräfte der Körper wie dieſe Höhen, und bey gleichen Höhen, wie die Maſſen verhalten, da es denn ſeine Richtigkeit hat, daß die Höhen, auf welche die Maſſen ſteigen, den Quadraten der Geſchwindigkeiten proportional ſind, womit ſie zu ſteigen anfangen. Allein es iſt nicht abzuſehen, warum der Körper deßwegen, weil er dieſe oder jene Höhe erreicht, eine ihm eigene Kraft beſitzen ſoll. Der Körper ſteigt vermöge ſeiner Trägheit, ſo wie ein ruhender Körper vermöge ſeiner Trägheit ruhet, und außerdem iſt ſo wenig in dem bewegten, als in dem ruhenden Körper etwas, daß den Namen einer Kraft verdiente.

28. §.

Wenn dieſe Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, ſo iſt die leibnitziſche Eintheilung der Kräfte in **todte** und **lebendige** A. E. Apr. 1695. p. 149. ganz unverſtändlich. Körper, die bloß drücken, wie Gewichte, die unterſtützt ſind, geſpannte Federn, u. ſ. w. ſollen eine todte Kraft, bewegte Körper eine lebendige Kraft beſitzen, da denn ſeine Vergleichung von den letztern eigentlich gelten ſoll. Allein ein bloß drückender ſchwerer Körper drückt ja nach den ſonſt allgemein angenommenen Begriffen nicht ſelbſt, ſondern das was drückt, muß wenigſtens in Gedanken von dem Körper unterſchieden werden. Es iſt wenigſtens etwas anders, als was man ſonſt **Trägheit** nennt. Fällt das Hinderniß weg, was den Druck aufhält, ſo iſt wiederum der Körper nicht ſelbſt dasjenige, was ihn bewegt. Eben das, was vorhin drückte, iſt zugleich dasjenige, was den Körper nun bewegt. Hört dies einmal auf, den Körper weiter zu beſchleunigen, ſo behält zwar der Körper die letzte Geſchwindigkeit, und geht damit vermöge ſeiner Trägheit gleichförmig fort. Allein man muß nun billig weiter fragen, was denn überdem in den Körper hinein gekommen ſey, das den Namen einer lebendigen Kraft verdiene? Soll es das Vermögen ſeyn, den Zuſtand eines andern Körpers zu ändern, ſo hat dies der ruhende Körper auch, und es iſt dem bewegten nicht allein eigen.

29. §.

Soll die Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige noch einigermaſſen verſtändlich ſeyn, ſo wäre am natürlichſten zu glauben, daß Leibniz durch die **lebendige Kraft** eine wirkſame und thätige Kraft, etwas, das wirklich Bewegungen verurſacht, verſtanden wiſſen wolle; oder recht metaphyſiſch zu reden: eine vim agentem, in actu ſecundo conſtitutam, und daß **todte Kraft** ſoviel heißen ſolle, als vis non agens, vis in actu primo conſtituta. Faſt alle Schriftſteller, ſie mögen für oder wider Leibnitzen geſchrieben haben, erklären ſich auch über dieſe Eintheilung ſo, und ich muß geſtehen, daß, wie mir deucht, die eigene Leibnitziſche Erklärung im Specim. Dyn. a. a. O. p. 149. nicht wohl anders verſtanden werden könne. Indeſſen erklärt ſich doch Joh. Bernoulli, der eifrigſte Vertheidiger des H. v. Leibniz, darüber ganz anders. Er verſtehet durch lebendige Kraft ein bloſſes **Vermögen** zu handeln, folglich eine vim non agentem, in actu primo conſtitutam. Dies ſagt Bernoulli, ſelbſt in der Diſſ. de vera notione virium vivarum §. III. Oper. T. III. p. 240. wenn er ſich ſo ausdrückt: Hinc patet, vim *vivam* (quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice *le pouvoir*) eſſe aliquid reale &c. und eben daſelbſt im 1. §. vis viva non conſiſtit in actuali exercitio, ſed in *facultate agendi*. Dieſe Erklärung giebt der Streitfrage einen ganz andern Sinn, als die meiſten Schriftſteller zum Grunde ſetzen. Hat Bernoulli die eigentliche Meinung des H. v. Leibniz getroffen, ſo hätte Leibniz nicht ſagen ſollen: vis mortua *eſt* ſollicitatio ad motum, ſondern vielmehr ſo, ſollicitatio ad motum gignit vim mortuam, und von der vi viva hätte es heißen müſſen: eſt vis cum motu actuali genita. Die **todte Kraft** iſt nun eigentlich **gar keine**, oder vielleicht beſſer mit Leibniz und Bernoulli zu reden, ein **unendlich kleines Vermögen** den Zuſtand andrer Körper zu ändern. Es iſt nicht mit dem **Druck** einerley, ſondern es iſt etwas, das der Druck als einen Effect hervorbringt. Wenn nun Leibniz ferner ſagt: vis eſt viva ex infinitis vis mortuæ impreſſionibus nata, ſo muß man dieſe Worte ſo verſtehen: wenn nach gehobenem Hinderniß das, was vorhin drückte, z. E. die Schwere, eine Maſſe wirklich bewegt, ſo ſetzt die Schwere in jedem folgenden Augenblick in die Maſſe ein neues unendlich kleines Vermögen hinein, welches denn in endlicher Zeit ein endliches Vermögen, d. i. die vim vivam erzeuget. **Druck** und vis mortua ſind hier alſo wie Urſache und Effect unterſchieden. Daher hätte Leibniz, ſeinem eigenen Sinn gemäſſer ſeine Worte ſo faſſen müſſen: vis eſt viva ex infinitis viribus mortuis impreſſis nata. Ich glaube, daß dieſe Vorſtellung wenigſtens den Begriffen völlig gemäß ſey, die Joh. Bernoulli von der Sache hatte. Er ſagt im Diſcours ſur le mouvement Chap. III. Def. II. la *forçe morte* eſt celle, que reçoit un corps ſans mouvement, lorqu' il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir &c. Oper. T. III. p. 23. Alſo iſt die preſſion die Urſache, und die forçe morte die Wirkung. Das ſchlimſte iſt, daß Bernoulli ſo wenig als andre bey einerley Art ſich zu erklären geblieben ſind. In der Abhandlung de vera notione vir. viv. §. IV. redet er wieder ſo, als wenn vis mortua und preſſio völlig einerley ſeyn ſoll. Doch die Schriftſteller, welche auf dieſen Unterſcheid ſo ſehr dringen, mögen es ſelbſt ausmachen, was die vis mortua eigentlich ſeyn ſolle. So viel iſt gewiß: nach der Bernoulliſchen Erklärung der vis vivæ heißt die Frage, wie verhält ſich die lebendige Kraft einer Maſſe M zur Kraft der Maſſe N? eigentlich ſoviel: Wieviel *kann* M mehr oder weniger als N ausrichten? Wenn man nun die Höhen, worauf vertical aufwärts geworfene Körper ſteigen können, die Tiefe der Löcher, welche frey herabfallende Körper in weichen Thon ſchlagen können, die Anzahl elaſtiſcher Federn, welche ſie zuſammen preſſen können, u. ſ. w. für dasjenige annimmt, was dieſe den Maſſen zugeſchriebene Facultates ausrichten können; ſo muß freylich das Verhältniß $MC^2 : mc^2$: daraus folgen. Aber denn iſt nicht abzuſehen, warum ruhende, ja völlig unbewegliche Körper nicht eben ſo eine lebendige Kraft beſitzen ſollen. Man verwechsle die Umſtände mit den fallenden harten Kugeln in weichen Thon. Man laſſe eine weiche Kugel gegen einen vertical ſtehenden harten cylindriſchen oder prismatiſchen Pflock fallen, der in Vergleichung mit der Größe der Kugel eine geringe Dicke hat, ſo wird die Kugel auf demſelben, wie auf einem Spieß ſtecken bleiben. Hat dieſer Pflock nicht auch das Vermögen in die anſchlagende Kugel ein Loch von beſtimmter Tiefe zu bohren, oder iſt die Kugel allein die Urſache dieſes Erfolges, ohne daß der Widerſtand des Pflocks Antheil daran hat? Ich finde bey den harten in weichen Thon ſchlagenden Kugeln nichts, was in dem Verſtande **Kraft** heißen kann, in welchem dies Wort in der Mechanik ſonſt gebraucht wird, wenn ich ihnen in dem Augenblick der erſten Berührung die Schwere nehme, (wie hier geſchehen muß, da die vermeinte Kraft nun in dem Körper wegen der letzten Geſchwindigkeit ſchon befindlich ſeyn, und die Schwere nicht mehr in Betracht kommen ſoll). Sie dringen vermöge ihrer Trägheit in den Thon hinein, und der Druck, welcher in jedem Augenblick durch die Berührung der folgenden Theile entſtehet, vermindert die Bewegung der Kugeln ſo, wie die Schwere die Bewegung ſteigender Körper.

30. §.

Wenn nun dies alles, wie ich glaube, ſeine Richtigkeit hat, ſo weis ich nicht, ob ich irre, wenn ich behaupte, daß die ſtatiſche Theorie von Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte überall bey dieſer Streitigkeit ſehr übel angebracht ſey. Dieſe Lehre läßt ſich nur da anwenden, wo von Preſſungen die Rede iſt, und das ſollen die lebendigen Kräfte wenigſtens nach der Bernoulliſchen Erklärung nicht ſeyn. Es iſt gewiß ſehr ſonderbar, wenn die Diagonale und Seitenlinien eines Parallelograms facultates agendi vorſtellen, und die letztern ſo verglichen werden ſollen, wie man Preſſungen vergleicht. Daher fällt alles von ſelbſt weg, was aus dieſer Theorie ſowohl für als wider das leibnitz-bernoulliſche Kräftenmaas iſt geſchloſſen worden. Ich kenne in der ganzen Statik und Mechanik keine andre Kräfte, als Preſſungen, die entweder durch Hinderniſſe aufgehalten werden, oder die Maſſen, welche ſie preſſen, wirklich bewegen, und deren Natur in beyden Fällen einerley iſt und bleibt. Aus dieſen Begrifen, und dem, was **Trägheit** heißt, läßt ſich die ganze Mechanik unvergleichlich herleiten, und ſo viel ich einſehen kann, kömmt die ganze hier herrſchende Verwirrung darauf an. Von einer **mechaniſchen Kraft** haben wir einen bloß ſinnlichen Begrif, ſo wie z. E. von einer graden Linie. Daher können wir aus dieſem Begrif eigentlich nichts ſchließen, wir müſſen vielmehr die erſten Grundſätze der geſammten Mechanik, ſo gut wie die erſten geometriſchen Grundſätze aus ſinnlichen Empfindungen hernehmen. **Druck**, **Zug**, **Stoß**, ſind die Wörter, die wir im gemeinen Leben da gebrauchen, wo eigentlich von einer bewegenden Kraft die Rede iſt, und dies iſt allemal etwas **thätiges**. Wir brauchen aber das Wort Kraft auch in unzähligen andern Fällen, wo es ein bloſſes **Vermögen** bezeichnet. Wir ſchreiben Geiſtern

Kräfte zu, dem einen eine größere, dem andern eine kleinere, wenn der eine mehr thun kann als der andre. Dieſe Kräfte kennen wir noch weniger, als die mechaniſchen, wir haben eigentlich, wenn wir es aufrichtig heraus ſagen wollen, gar keinen Begrif davon. Dieſe Art Kräfte hat man mit den mechaniſchen unter ein genus bringen, und auf ähnliche Art, wie die mechaniſchen Kräfte vergleichen wollen. So etwas, das in dieſem ſo ſehr allgemeinen Verſtande **Kraft** heißen ſoll, hat man einem bewegten Körper auch zugeſchrieben. Dies heißt aber, den metaphyſiſchen Begrif einer Kraft mit dem mechaniſchen verwirren, und die Mechanik in eine eben ſo dunkle Wiſſenſchaft verwandeln, als viele metaphyſiſche Syſteme ſind.

Frage,
wo ſo viele
Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren?
und wie denſelben abzuhelfen?

beantwortet

von

Herrn Euſebius Amorth,

Kanonikus Regularis zu Polling.

Die Urſache der ſo vielfältigen, und verderblichen Ausgüßungen der Flüße in Baiern, die wir ſeit vielen Jahren wahrnehmen, iſt nicht einem bey unſern Zeiten in größerer Menge, als ſonſt, herabfallenden; Regen oder Schnee zuzuſchreiben: denn die älteſten Leute in hieſigen Landen verſichern uns, daß, obwohl es ehemals eben ſo viel geregnet, und geſchneyet hat, dennoch ſo groſſe Ueberſchwemmungen aller an die Flüße angränzenden Ortſchaften nicht beobachtet worden. Die Urſache dieſer Ueberſchwemmungen iſt alſo vielmehr von der Häufung des Sandes, und der daraus entſpringenden Erhöhung des Grundes in den Flüßen herzuholen.

Es iſt ſehr wahrſcheinlich, daß ein ſolcher Grund in hundert Jahren nach Unterſchied der Geſchwindigkeit des Flußes, und ſeiner eigenen Steinartigkeit um 1. 2. 3. Schuhe in ſeiner Höhe anwachſe. Die Erfahrung ſelbſt zeiget, daß dieſe Flüße nach merklicher Anſándung ihres Rinnſaales ihren Lauf verändern, und ſelben bald zur rechten, bald zur linken Seite richten, je nachdem ſie hier oder dort einen niedrigern, und leichter ſandichten Grund antreffen.

Wie viel Schaden durch dieſes landverderbliche Uebel verurſachet werde, iſt aus den Klagen jener Unglücklichen bekannt, deren Wieſen, Felder, oder Häuſer an dergleichen Flüße ſtoſſen. Die Erbarmung gegen dieſe armen Leute, und das höchſte landesherrliche Intereſſe ſelbſt erfordert es, daß man auf hinlängliche Wehrmittel bedacht ſey, dieſen gewaltſamen Austritten, und Abänderungen des Rinnſaales der Flüße vorzubeugen.

Mir deuchte das füglichſte unter allen zu ſeyn, wenn man in groſſen Flüßen eine Art von ſolchen Maſchinen errichtete, dergleichen eine in Venedig zu Säuberung des Meergrundes errichtet worden, und noch immer in baulichem Stande erhalten wird, damit die Stadt nicht unſchifbar, oder wohl gar mit der Zeit an das feſte Land angehängt werde.

Freylich könnte man einwenden, daß, wenn man ſchon auf dieſe Art die Flüße von dem in Zeit von hundert Jahren zween bis drey Schuhe hoch angewachſenen Sande reinigen, und die Gründe in ihre alte Tiefe ſetzen könnte, dennoch eben hieraus andere unüberwindliche Beſchwerniſſe erfolgen würden. Denn wenn ſchon die Iſer, der Inn, und der Lech in ihre gehörige Grundtiefe geſenkt würden, ſo könnte doch eine groſſe Anſchwellung beſagter

Flüße nicht verhindert werden, ſobald ſie ſich in einen andern Fluß eines höhern Grunds z. B. die Iſer und der Inn in die Donau ergießen. Allein ich antworte hierauf, daß ſich dieſe Anſchwellung in ihrer Länge nicht viel über 200 bis 300 Schuhe, und in ihrer geneigten Höhe nur etwann auf 3 Schuhe erſtrecken, folglich durch den Fleiß der Ruderknechte leichtlich würde überwunden werden. Vielmehr wäre zu befürchten, daß die Donau groſſentheils in den niedrigern Rinnſaal der Iſer, oder des Inns herunterzufallen trachten, und mit vereinigten Gewäſſern eine neue Bahn ſuchen, folglich aus zweyen Uebeln drey Uebel erfolgen würden. Allein dieſe Forcht iſt weitſchichtig, und ein ſo eitler Schrecken eines nur möglichen Uebels muß uns von einer vernünftigen Abwendung wirklicher Unglücke nicht hindern.

Man könnte auch dieſen ſchädlichen Ueberſchwemmungen durch holländiſche Dämme bis auf Paſſau vorbeugen, deren Unkoſten ſich in ſo kurzer Länge kaum über 50000. Gulden erſtrecken würden.

Ich erinnere mich hier einer frommen Stiftung, welche von dem Hofmaler Amorth ſchon vor beyläufig hundert Jahren gemacht worden, und noch heut zu Tage genau beobachtet wird, um in einem gewiſſen Diſtrict, **Ober Lengeries**, die Iſer von groſſen Steinen zu reinigen, und dadurch vieles Fluchen der Floßknechte zu verhindern. Welch einen unſterblichen Nachruhm, welch ein Verdienſt um das Vaterland würde ſich ein Menſchenfreund, ein Patriot, den der Himmel mit Reichthum und Glücksgütern geſegnet hat, machen, wenn er entweder bey ſeinen Lebzeiten, oder durch eine letztwillige Vermächtniß eine ſolche Stiftung zu Säuberung der Flüße in Baiern von dem anwachſenden Sande und zu Verhütung der Ueberſchwemmungen verordnete! Es würde dieſe

Verordnung vor andern Schankungen zum frommen Gebrauche auch dieſen Vorzug haben, daß dadurch nicht einzelne Perſonen, ſondern ganze und viele Familien, ja ganze Generationen vor Schaden und Armuth geſicheret würden. Welch ein ſüßer Gedanke, wäre er doch Reichen fühlbar! auch noch in ſeiner Aſche von ganzen Nachkommenſchaften geſegnet zu werden!

Leonard Grubers
Benediktiners
einige

analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien,

an die churfürſtliche Akademie der Wiſſenſchaften
in München eingeſendet.
1770.

Erinnerung.

Die Werke eines Krammers, dieſes ſo groſſen Meiſters in der Mathematik, ſind gewiß für ſich wichtig und nützlich genug einen Liebhaber der mathematiſchen Wiſſenſchaften und ſonderlich des höhern Kalkulus zu beſchäftigen. Man wird mir es alſo zu gut halten, wenn ich in Durchleſung dieſes ſo vortreflichen Buches etwas mehrers gewagt habe, als ſelbes bloß zu durchgehen. Ich habe nämlich ſeine erhabenen Grundſätze beſſer einzuſehen, und mich nach der Vorſchrift dieſes vollkommenen Mathematikers zu üben, einige Beyſpiele gewählet, welche in ſich zwar willkührlich herausgeſucht ſind, zu den nachgeſetzten

Anwendungen aber, welche meine Hauptabſicht ſind, mir ſehr dienlich ſeyn werden. — In den vorausgeſchickten Begrifen zu Anfange des erſten Abſchnittes wird man ſich wohl einiger Klarheit halber auf des H. Krammers Werke beziehen müſſen; denn ich wollte und könnte ſelbe weder gänzlich weglaſſen, noch auch ausführlich anrücken. Die angeſetzten Beyſpiele habe ich nach der einfachſten und willkürlichen Methode berechnet. Man wird aus einer angeſtellten Vergleichung ſehen können, ob ich darinn glücklich war; und ein wiederhollter Verſuch mag ſelbe beſtättigen. — Die in zweenen Abſchnitten gemachten Anwendungen, ob ſie ſchon etwa der gehabten Abſicht des vom Verfaſſer geſchriebenen Werkes nicht am nächſten kommen, *) ſo werden ſie doch derſelben in dem Stücke genug thun, daß ich damit ein obſchon geringes Probſtück liefere, wie die analytiſchen Grundſätze dieſes gelehrten Mannes nicht nur in ihrer Theorie erhaben ſind, ſondern auch auf andere Wiſſenſchaften, als hauptſächlich auf die Mechanik und Aſtronomie, einen ſtarken Einfluß haben, und mit einem ungemein groſſen Vortheile mögen angewendet werden. **) Hier iſt alſo der zureichende Grund dieſer meiner Beſchäftigung aufgedecket. Habe ich in der Zukunft genugſame Zeitmuſſe und hinreichende Kräften, ſo werde ich davon mehrere und etwa ſehr nützliche Anwendungen nach eben dieſen Gründen zu machen, mir angelegen ſeyn laſſen. Indeſſen wird es mir genug ſeyn, wenn eine Churfürſtl. Akademie dieſes geringe Piece als eine mittelmäßige Nachahmung, und als ein Zeugniß meines Fleißes und Genie zur Mathematik aufzunehmen, gnädigſtes Belieben trägt. Vielleicht werde ich mit der Zeit in wichtigern Gegenſtänden Ihren Beyfall zu erhalten im Stande ſeyn, wenn man mir doch für die weitere Beförderung meiner Lehrbegierde an die Hand geben wird. Ich wünſche gewiß nichts ſo ſehr als einer Churfürſtl. Akademie meine obſchon geringen Dienſte ächt thätig wiedmen zu können.

---

*) Der Verfaſſer erklärt ſelbe in ihrem Umfange alſo: Par cette art infiniment utile de deduire d'un ſeul principe univerſel un grand nombre de verités, de les ſoumettre à des Regles generales, de les developper par des conſequences uniformes, & de les lier les unes aux autres, de la maniere la plus propre, à faire naitre de nouvelles decouvertes &c.

Preface de l'Anal.

**) On ſauroit s'en paſſer dans les Sciences, dont la Perfection depend de la geometrie, telles, que la Mechanique, l'Aſtronomie, la Phyſique. Les Syſtemes modernes ſuppoſent neceſſairement cette connoiſſance.

Pref. de la même.

Analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien.

Erſter Abſchnitt.

Einige Beyſpiele derſelben.

1. §.

Von den verſchiedenen Wendungen der krummen Linien ſich einen ächten Begrif zu machen, ſo darf man nur eine krumme Linie betrachten, wie ſelbe von einer geraden durchſchnitten wird, alſo zwar, daß ein Theil davon auf dieſer, der zweyte aber auf einer andern Seite zum Vorſchein kömmt: wo es ſich dann fügen kann, daß eine ſolche gerade Linie, welche man deßwegen die

Secans nennet, die krumme in mehrern Puncten durchſchneide. Wenn nun zween ſolche Puncte des Durchſchnittes ſich einander unendlich nahe ſind, daß ſelbe in einen einzelen Punct zuſammenfließen, und man ſie gar nicht mehr unterſcheiden kann, ſo machen ſie einen einzelen Berührungspunct aus. Hiemit wird die gerade Linie die krumme nicht mehr durchſchneiden, ſondern ſelbe nur in einem einzelen Puncte berühren: oder, wie man ſagt, die Secans wird zur Tangente.

2. §.

Der nämliche Punct einer Linie bekömmt eine gegenſeitige Wendung, wenn drey Durchſchnittspuncte in einem einzelen zuſammen fließen. Hiemit wird die gerade Linie, welche man durch dieſe 3 unendlich nahen Puncte ziehet, die krumme zugleich durchſchneiden und berühren (1. §.). Es mag ſich dieſes aber nur fügen in jenen Gattungen der krummen Linien, welche über die zwote ſogenannte Ordnung oder Klaſſe hinaus ſind; zum Beyſpiele in einer Parabole, wo man die Gleichung $y = ax^3$ annimmt. Nun in einem ſolchen Falle kann man wohl annehmen, daß die Tangente in dem Puncte einer entgegengeſetzten Wendung drey Puncte von der krummen Linie berühre: da doch in den krummen Linien der zwoten Gattung dieſe Berührung nur in einem einzelen Puncte geſchehen kann; in den gemeinern aber in zween Puncten, welche ſich nämlich einander unendlich nahe ſeyn müſſen: deßwegen wird man auch in dieſen letztern niemals einen Punct von einer entgegengeſetzten Wendung antreffen, wovon wir im analytiſchen Kalkulus genugſame Beyſpiele haben, und welche hier anzurücken, der enge Raum nicht zuläßt.

3. §.

Ein Punct der Linie nimmt an ſich eine ſchlangenförmige Wendung, wenn zum Beyſpiele eine gerade Linie eine krumme von der 4ten oder noch höheren Klaſſe in dem Puncte der entgegengeſetzten Wendung berührt. Deßwegen, wenn wir ſetzen, daß was immer für eine Secans unendlich klein werde, ſo wird ſie die krumme Linie nicht mehr durchſchneiden, ſondern ſelbe nur berühren, allein dieſe Berührung geſchieht in zween Punkten, welche man für 4. Durchſchnittspuncte halten kann (§. 1.). Indeſſen, weil dieſe Puncte ſich einander unendlich nahe ſind, ſo wird man wohl die gegenſeitige Wendung nimmermehr durch die Sinne wahrnehmen können, den der Raum, welchen ſie einnehmen, iſt unendlich klein. Um uns alſo dieſe ſchlangenförmige Wendung vorzubilden, müſſen wir die Theorie des Analyſis zu Hülfe nehmen, durch welche allein wir uns einen, obſchon abſtracten Begrif machen können.

4. §.

Es iſt aber aus den gemeinern Beyſpielen der Gleichungen einer Parabole ſchon ausgemacht, daß, wenn in ſelber $y=x^2$, oder $y=x^3$, oder $y=x^4$, oder $x=x^5$ und ſ. w. iſt, die Tangente allzeit die krumme Linie in dem Puncte der gegenſeitigen Wendung öfters als in zween Puncten berühre, als der Grad der entgegengeſetzten Wendung anzeiget; alſo zwar, daß, wenn man für eine Parabole eine allgemeine Gleichung z. B. $y=x^m$ annimt, ſo iſt es durchaus richtig, daß die Parabole in ihrem Urſprunge einen Punct der gegenſeitigen Wendung hat, deſſen Grad durch $m-2$ kann ausgedrücket werden. Es wird auch dieſer Punct der entgegengeſetzten Wendung oder Krümmung ſcheinbar werden, wenn m eine ungleiche Zahl bedeutet: iſt ſelbe aber nicht ungleich, ſo iſt die Krümmung dieſes Punctes unwahrnehmlich: und in dieſem Falle, wird es eigentlich ein Punct von einer ſchlangenförmigen Wendung ſeyn.

5. §.

Dieſes ſind nun die Hauptbegrife, welche vorauszuſetzen es nöthig war, um die nachfolgenden Beyſpiele und Anwendungen in das Klare zu bringen. Will man aber von dieſen Begrifen eine mehrere Erklärung oder auch Beyſpiele davon haben, ſo kann man ſelbe in den analytiſchen Werken des Herrn Krammers und des Mr. de Gua *) finden. Uebrigens war bisher nur die Rede von den einfachen Puncten in ihren verſchiedenen Wendungen; denn es giebt auch noch andere, welche ſich in Rückſicht auf die nämliche krumme Linie vervielfältigen können. Alſo z. B. iſt es ein zweyfacher Punct, wenn ſelber zween Bögen oder ſogenannten Aeſten der krummen Linie gemein iſt, oder auch durch welchen man die krumme Linie zweymal ziehet. Auf gleiche Weiſe nennt man einen dreyfachen Punct, welcher dreyen Puncten der krummen Linie gemein iſt, oder durch welchen die krumme Linie dreymal ſich wälzet, und ſo weiters zu reden von den vier, fünffachen Puncten, von welchen gleichfalls in benennten Werken Beyſpiele anzutreffen ſind. Ich will alſo bey andern Beyſpielen den Anfang machen.

6. §.

Es iſt in der Theorie der verſchiedenen Wendungen eines Punctes in einer krummen Linie ein Hauptgrund, daß man wiſſe, ob ein ſolcher Punct, deſſen Lage wir indeſſen außer den Urſprung

---

*) Uſage d'Anal.

ſprung der krummen Linie annehmen wollen, einfach oder vielfältig ſey. Man kann ſolches nach der folgenden Methode ausforſchen. Man überſetze vor allen den Urſprung der krummen Linie auf den gegebenen Punct; und man ziehe daſelbſt eine Abſciſſe m und eine Ordinate n. In der Gleichung ſelbſt ſetze man ſtatt x ein $m + x$ und ſtatt y ein $n + u$. Wenn man nun dieſe Werthe in der gegebenen Gleichung einrücket, ſo kann man ſelbſt aus der Zahl der mangelhaften Reihen, welche in der Gleichung zum Vorſchein kommen, von der Natur des gegebenen Puncts ein Urtheil fählen. Doch in der Umänderung der gegebenen Gleichung richtig und bequem zu gehen, wird es gut ſeyn, wenn man die gegebene Gleichung in einer Reihe ſchreibt, und unter einem jeden Abſatz derſelben die Exponenten des x und y hinſetzt, welche man zwar durch einen Punct unterſcheidet, ohne aber hiedurch eine Multiplication anzuzeigen, ſondern nur zu erinnern, daß der erſte Exponent von dem y, der zweyte von dem x geborget ſey. Man ziehe ſodann unter dieſe beyden Reihen eine Linie, und multiplicire durch den Exponenten des y alle Abſätze der gegebenen Reihe ins beſondere. Man ſoll aber das y einmal weglaſſen, und ſtatt ſelben ein u einrücken. Auf gleiche Weiſe verfährt man mit dem Exponenten des x, welches man gleichfalls einmal wegläßt, und dafür ein z anſetzt. Dieſe Berechnungsart ſetzt man durch jede Abſätze der gegebenen Gleichung fort; und, weil man die neu erhaltene allzeit unter die gezogene Linie herabſetzt, ſo bekömmt man wiederum eine neue Reihe. Den Abſätzen dieſer neuen Reihe ſetze man ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten hinzu, welcher von dem y iſt übrig geblieben, wie auch ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten von x. Alsdenn fahre man mit der nämlichen Berechnungsart ſo lange fort, bis in keinem Abſatze der gegebenen Gleichung das y oder x mehr zum Vorſchein kömmt. Endlich ſammle man die Abſätze, welche von dem u und z in der nämlichen Potenze ſtehen, zuſammen, und, da man ſtatt des y ein n, und für das x ein m anſetzet, ſo bekömmt man eine ganz neue Gleichung, ſo wie wir es klärer im folgenden Beyſpiele ſehen werden.

7. §.

Erſtes Beyſpiel.

$$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0.^{*)}$$

$$\underline{4.0. \quad 3.0. \quad 2.\ 1. \quad 2.\ 0. \quad 1.1. \quad 0.2. \quad 0.1. = 0.}$$

$$+ 4y^3u - 24y^2u - (24xyu - 12y^2z) + 32yu +$$

$$\tfrac{3}{2}.0. \quad \tfrac{2}{2}.0 \quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{2}{2}.0. \quad \tfrac{1}{2}.0.$$

$$(48xu + 48yz) + 8xz - 64z$$

$$\underline{0.\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{1}{2}.0. \quad 0.\tfrac{1}{2}. \quad 0.0.}$$

$$+ 6y^2u^2 - 24yu^2 - (12xu^2 - 12yuz) - 12yuz] .$$

$$\tfrac{3}{3}.\ 0. \quad \tfrac{1}{3}.0. \quad 0.\tfrac{1}{3}. \quad \tfrac{1}{3}.0. \quad \tfrac{1}{3}.0.$$

$$+ 16u^2 + 24zu + 24zu + uz^2$$

$$\underline{0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0}$$

$$+ 2yu^3 - 8u^3 - 4u^2z - 4u^2z - 4^2z.$$

$$\underline{\tfrac{1}{4}.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0\ 0}$$

Die Abänderung der gegebenen Gleichung wird alſo folgende ſeyn

$$n^4 - 8n^3 - 12mn^2 + 48mn + 4m^2 -- 64m + (4n^3 -- 24n^2 - 24mn + 32n + 40m)u + (-12n^2 + 48n + 8m - 54)z + (22n^2 - 24n - 12m)u^2 + 4z^2 + (24n + 24)zu + (2n - 8)u^3 - 12u^2z - \frac{u^4}{2} = 0.$$

8. §.

---

*) Dieſe Gleichung, welche ich zur Ausführung dieſes Beyſpieles angenommen, iſt wirklich die Gleichung einer krummen Linie, (ſiehe weiter zurück 14. §.) und man kann ſelbe auch in des Krammers analytiſchem Werke angeſetzt finden: allein er beziehet ſich in dieſem Stücke auf des Saurins Abhandlungen, welche in den memoires de l'Academie 1716. Pag. 61. nachzuſuchen ſind.

8. §.

Wenn man auf die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung und auf ihre nacheinander angeſetzten Reihen aufmerkſam iſt, ſo wird man leicht wahrnehmen, daß, weil *m* und *n* als beſtimmte Quantitäten angenommen werden, die ganze erſte Reihe der abgeänderten Gleichung beſtimmt ſey, und wenn man ſelbe auf ein analytiſches Dreyeck beziehet, ſo wird ſie in deſſen Gipfel zu ſtehen kommen. Deßwegen, wenn dieſe erſte Reihe nach eingerücktem Werthe des x und y, dem m nämlich und den n (6. §.) nicht gänzlich getilget wird, ſo gehört der zum Urſprunge einer Linie angenommene Punct nicht zu einer krummen Linie: löſet ſich aber dieſe Reihe in ein O auf, ſo iſt es ein Zeichen, daß dieſer Punct zur krummen Linie gehöre.

9. §.

Wenn man nun einmal dieſen Punct beſtimmt hat, daß ſelber zur krummen Linie gehöre, ſo kann man unterſuchen, ob ſelber einfach oder vielfältig ſey (5. §.) Man muß alſo die zwote abgeänderte Reihe der gegebenen Gleichung hernehmen, und in ſelber die Werthe von m und n einrücken. Es iſt aber klar, daß in dieſer Reihe das u und z als die einfachſten Potenzen enthalten ſind; hiemit alle dieſe Abſätze in einem analytiſchen Dreyecke die erſte Horizontalreihe von dem Gipfel an einnähmen. Wenn nun beſagte abgeänderte Reihe ſich ſelbſt nicht gänzlich tilget, ſondern ein oder andrer Abſatz übrig bleibt, in welchem ein u oder z enthalten ſind, ſo iſt es gewiß, daß auch in einem Dreyecke die erſte Horizontalreihe von der Spitze deſſelben ſchon eingenommen ſey: hingegen tilget ſich dieſe Reihe, das iſt, iſt die Spitze des analytiſchen Dreyeckes noch leer, ſo kann man ſchließen, daß daß der angenommene Punct nur einfach ſey. Tilget ſich nun ferners auch die zwote abgeänderte Reihe, ſo hat man ſich an die dritte zu halten, und in ſelber die Werthe des m und n einzurücken. Wenn dieſe ſich nicht tilget, ſo wird in einem analytiſchen Dreyecke die zwote Horizontalreihe von der Spitze an eingenommen ſeyn, weil nämlich in ſelber Abſätze enthalten ſind, in welchen man das u^2, ux, und x^2 antrift (7. §.). Und alſo wird der Punct zweyfach ſeyn. Gehet man noch weiters, und tilget ſich gleichfalls die dritte Reihe, ſo wird man in der vierten die nämlichen Werthe des m und n einrücken müſſen, und dieſes ſo lang, bis man weis, ob der Punct dreyfach, vierfach ꝛc. ſey. Ich ſetze hievon Beyſpiele an.

10. §.

Zweytes Beyſpiel.

Man nehme die vorige Gleichung, welche ſchon §. 7. in eine andere iſt abgeändert worden. Man kann alſo davon zum erſten unterſuchen, ob der Punct, deſſen ordinate wir n die Abſciſſe aber m geheißen haben (§. 8.) und davon ich eine jede $= 2$ annehme, zur krummen Linie gehöre. Dieſes auszuforſchen, ſo darf man nur in der gegebenen Gleichung: $y^4 = 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ ſowohl für y als x den 2 einrücken, und man wird folgende Gleichung überkommen; nämlich: $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128 = 0$. Weil nun dieſe erſte Reihe ſich ſelbſt tilget, ſo gehört nach dem erſt geſagten (§. 8.) der angenommene Punct zur krummen Linie.

11. §.

Nachdem man nun weis, daß dieſer Punct zur krummen Linie gehöre, ſo läßt weiters die Frage, ob ſelber unter die einfachen oder vielfältigen zu zählen ſey (§. 5.). Man nehme alſo von der gegebenen und ſchon abgeänderten Gleichung die zwote Reihe für ſich, nämlich

$$\begin{array}{lllllll} y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x \text{ (§. 7.)} \\ \underline{4.\,0. \quad 3.\,0. \quad 2.\,0. \qquad 2.\,0. \qquad 1.\,1. \quad 0.\,2. \quad 0.\,1} \end{array}$$

$$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu$$
$$+ 48yz + 8xz - 64z$$

Setzt man nun für das x und y den beſtimmten Werth von m und n, nämlich $= 2$ und 2 an (§. 10.), ſo überkömmt man folgende Reihe:

$$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)\,u +$$
$$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)\,u +$$
$$(-12y^2 + 48y + 8x - 64)\,z.$$
$$(-48 + 96 + 16 - 64)\,z.$$

Weil nun auch die buchſtäbliche Quantitäten nämlich u und z einander aufgehoben werden, ſo verbleibt die andere Horizontalreihe eines analytiſchen Dreyeckes leer, und hiemit iſt der angenommene Punct wenigſt zweyfach (§. 9.)

12. §.

Nach dem erſtgeſagten tilget ſich alſo auch die zwote Reihe, und daher kann man mit der dritten Reihe einen ferneren Verſuch machen, um nämlich zu ſehen, ob der angenommene Punct etwa nicht dreyfach ſey (§. 9.). Man nehme alſo von der gegebenen und ſchon abgeänderten Gleichung die dritte Reihe (§. 7.), und, wenn man damit nach der vorigen Methode (§. 9.) verfährt, ſo überkömmt man folgendes.

$$\underset{\frac{3}{3}.\ 0.}{4y^3} - \underset{\frac{3}{2}.\ 0.}{24y^2u} - \underset{\frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}.}{24xyu} - \underset{\frac{2}{2}.\ 0}{12y^2z} + \underset{\frac{1}{2}.\ 0.}{32yu} + \underset{0.\ \frac{1}{2}.}{48xu}$$

$$+ \underset{\frac{1}{2}.\ 0.}{48yz} + \underset{0.\ \frac{1}{2}.}{8xz} - \underset{0.\ 0}{64z}.$$

$6y^2u^2 - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yuz - 12yuz + 16u^2 + 24uz + 24uz + 4z^2.$

oder: $(6y^2 - 24y - 12x + 16)u^2 + (-12y - 12y + 48)uz + 4z^2.$

13. §.

In der zwoten vorher angeſetzten Reihe (§. 11.) haben wir ſtatt des x und y ihren Werth m und $n = 2$ und 2 angeſetzt, wodurch dann die letzte Reihe ſich ſelbſt aufgehoben hat. Doch dieſes wurde niemals in der dritten Reihe (§. 12.) angehen, wenn man es verſuchen ſollte; denn dadurch würde doch niemals der Abſatz der letzten Reihe, nämlich $4z^2$, in welchem nämlich kein x oder y zum Vorſchein kömmt, können getilget werden. Aus der Aufhebung alſo einer ferneren Operation iſt es klar, daß der unterſuchte Punct nur zweyfach ſey (§. 9.).

14. §.

So unnütz es nun ſeyn würde wegen der fernern Unterſuchung des angenommenen Puncts weiter zu gehen, und eine fernere Abänderung der letzt erhaltenen Reihe vorzunehmen (12. §.), ſo würde man doch ein ſolches thun können um die Natur der krummen Linie, für welche dieſe Gleichung gegeben wurde (7. §. *) vollkommen auszuforſchen. Wenn man alſo in der ganzen abgeänderten Finalgleichung, welche wir oben (§. cit.) angeſetzt haben, für das m und n ihren Werth nämlich 2 einrücken (§. 10.), ſo wird die angeführte Finalgleichung ſich in folgende verwandeln:

$u^4 - 12u^3z - 32u^2 + uz^2 = 0$. Dieſe Gleichung hat nun 4 Wurzel davon I. $u = \surd(8z + 16 + 4\surd(2z^2 + 12z + 6))$ II. $u = -\surd(6z + 16 + 4\surd(2z^2 + 12z + 6))$. III. $u = +\surd(6z + 16 - 4\surd(2z^2 + 12z + 6))$. IV. $u = -\surd(6z + 16 - 4\surd(2z + 1 + 16))$. Oder aber, wenn wir ſie abkürzen, bekommen wir folgende Ausdrücke: I. $+\surd(4z + 8) + \surd(2z + 8)$. II. $-\surd(4z + 8) - \surd(2z + 8)$. III. $+\surd(4z + 8) - \surd(2z + 8.)$ IV. $-\surd(4z + 8) + \surd(2z + 8)$. Wollen wir nun nach des Krammers Beyſpiele * dieſe Ausdrücke wirklich auf eine krumme Linie beziehen, und für die Figur, welche auf die gegebene Gleichung paßt (§. 7.) einige Anwendung machen, ſo werden wir ſehen, daß jeder Ausdruck einen paraboliſchen Aſt in der beygeſetzten Figur anzeige. Alſo beziehet ſich der erſte Ausdruck $u = \surd(4z + 8) + \surd(2z + 8)$ auf dem Aſt f D; der zweyte, $u = -\surd(4z + 8) - \surd(2z + 8)$ auf F d; der dritte $u = +\surd(4z + 8) - \surd(2z + 8)$ auf F A E; der vierte $u = -\surd(4z + 8) + \surd(2z + 8)$ auf f A e. Die letztern zween haben zum Aſymptote die Parabole e A E, wovon die Gleichung iſt $u^2 = (6 - 4\surd 2)z$; die erſteren aber die Parabole d A D, unter der Gleichung $u^2 = (6 + 4\surd 2)z$. Endlich wird die gegebene Gleichung: $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ (§. 7.) durch eben dieſe Figur vorgeſtellt, nämlich durch die krumme Linie, welche man auf den Punct F als ihren Urſprung beziehet, und deßwegen der Punct A für einen zweyfachen (§. 5.) muß angeſehen werden, deſſen Abſciſſe nämlich F G, und die Ordinate G A iſt, deren eine jede $= 2$ (§. 11.).

15. §.

Die ganze Berechnung und Ausführung dieſes gegebenen Beyſpieles (§. 10.) hat für ſich vorausgeſetzt, daß der ange-

---

*) Siehe deſſelben Analyſe auf der 419. Seite.

nommene Punct zur krummen Linie gehöre, ſo wie wir dieſes ſchon vorher (§. 11.) beſtimmet haben. Setze man nun, daß der angenommene Punct außer dem Urſprunge der krummen Linie in einer deren zwoen Axen anzutreffen ſey, ſo wird die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung viel leichter ausfallen; denn iſt der gegebene Punct in der Axe der Abſciſſen, ſo muß man eben darum das $y = o$ und das $x = n$ (welches in dieſem Falle eine unabänderliche Quantität anzeiget) annehmen: hiemit werden ſich alle Abſätze der gegebenen Gleichung, welche nämlich mit dem y multipliciret ſind, von ſelbſt aufheben; und alſo die Abänderung nur mit jenen vorzunehmen ſeyn, in welchen das x zum Vorſchein kömmt. Auf gleiche Weiſe, wenn man den angenommenen Punct in die Axe der Ordinaten überſetzet, ſo wird das x getilget, das y aber einer unabänderlichen Quantität müſſen gleich gehalten werden.

Drittes Beyſpiel.

16. §.

Ich nehme hier wiederum eine Gleichung: $y^3 - 2\,ay^2 + a^2\,y + x^2y - 2\,a\,x^2 = o$, welche ſich auf die beygeſetzte Figur beziehet, und die krumme Linie P A M zum Gegenſtand hat, wovon der Urſprungspunct in P geſetzet wird. * Es iſt alſo der gegebene Punct außer der krummen Linie, ſo wie wir es vorher verlangt haben (§. 15.). Nun unterſuche man, ob der Punct A einfach oder vielfach ſey. Weil man hier $PA = a$, und $x = o$ annehmen muß, ſo kann man in der gegebenen Gleichung die Abſätze $x^2\,y - 2\,a\,x^2$ weglaſſen. In den übrigen aber ſtatt des y das a ein-

---

*) Die Conſtruction dieſer krummen Linie, wie auch den Beweis ihrer Gleichung kann man in dem angezogenen analytiſchen Werke des Krammers pag. 411. finden.

einrücken. Hiemit bekömmt man ſtatt der gegebenen folgende Gleichung: $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Der Punct A gehört alſo zur krummen Linie (§. 8.). Nun mache man einmal mit der gegebenen Gleichung eine Abänderung nämlich:

$$\begin{array}{ccc} y^3 & -\,2ay^2 & +\,a^2y \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$(3y^2 - 4ay + a^2)u$ (§. 6.); und wenn man für das a ein y einrückt, ſo iſt $(3a^2 - 4a^2 + a^2)u = 0$. Es tilget ſich alſo die erſte Horizontalreihe, und der Punct iſt wenigſt dreyfach (§. 9.). Nehmen wir aber von der gegebenen abgeänderten Gleichung die dritte Reihe, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} 3y^2u & -\,4ayu & +\,a^2u \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$3u^2y - 2au^2$, ſo ſehen wir ſogleich, daß, wenn wir auch ſtatt des y das a einrücken, dennoch dieſe Reihe nicht getilget werde. Deßwegen kann man ſchließen, daß der unterſuchte Punct A nur allein zweyfach ſey. (§. cit.)

17. §.

Alles, was bisher iſt angeführt worden, zielet ab, theils die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden (§. 8.), theils die Vielfältigkeit des gegebenen Puncts zu beſtimmen (§§. 9. 12.) theils ſelben auf die krumme Linie zu beziehen (§. 10.), und endlich die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung auszuforſchen (§. 14.): dieſes aber ſind nur ſonderliche Fälle. Man kann aber auch allgemeine ſetzen, wo dann ſowohl die Beyſpiele als die Methode ſelbſt ſich unter einem anderen Geſichtspuncte darſtellen wird. Ein ſolcher allgemeiner Fall iſt es, wenn man insgemein fraget, ob die gegebene Gleichung, welche ſich auf eine krumme Linie beziehet, einen Punct habe, welcher vielfältig ſey. Item: was für eine Lage ein ſolcher Punct in der krummen Linie der gegebenen Gleichung habe. Der erſten allgemeinen Aufgabe kann man zwar durch die obenangeführte Methode der Abänderung der gegebenen Gleichung genug thun (§. 6.). Man ſetzt nämlich die erſte Reihe, in welcher ein u und x zum Vorſchein kömmt, mit einer o in eine Gleichung, und alſo wird man drey Gleichungen überkommen; nämlich eine, welche für die krumme Linie iſt gegeben worden; wiederum eine andere, in welcher die Conficienten von u; und endlich eine dritte, wo die Conficienten von x enthalten ſind. Aus dieſen 3 Gleichungen kann man nun eine heraus nehmen, welche zur Beſtimmung des Werthes des x, oder auch des y die geſchickteſte zu ſeyn ſcheint. Den überkommenen Werth hat man hernach in die übrigen zwo Gleichungen einzurücken, damit man hernach auch von der anderen unbekannten Quantität, z. E. von dem y ſeinen Werth überkomme, welcher, wenn er nicht negative und überall der nämliche iſt, ſo wird auch der Werth des x der ächte und beſtimmte ſeyn. Kömmt man aber in der Unterſuchung dieſes Werthes auf eine falſche Folge, ſo hat man ſelben aus anderen Gleichungen zu unterſuchen.

18. §.

In dem Falle, daß der Punct dreyfach iſt, ſo hat man noch die zwote Reihe, in welcher nämlich; das u^2, ux, x^2 ſich einfinden (§. 7), hinzuzuſetzen, wo man dann wiederum ihre conficienten mit einer o zu vergleichen hat, und alſo hat man den Werth der unbeſtimmten Größen durch 6 Gleichungen auszurechnen. Auf gleiche Weiſe wird man in der Unterſuchung eines Punctes, welcher vierfach iſt, mehrmal eine neue Reihe hinzufügen müſſen, in welcher nämlich u^3, u^2x, ux^2, x^3 würden enthalten ſeyn; zugleich wurden auch zu den vorigen 6 Gleichungen 4 neue hinzukommen ꝛc. Die Aufgabe wird alſo mehr als beſtimmt, und öfters auch nicht einmal auflößlich ſeyn. Ich will davon wiederum ein Beyſpiel geben.

19. §.

Viertes Beyſpiel.

Ich nehme die ſchon einmal angeſetzte Gleichung; nämlich

$$y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0 \quad (16.\ \S.)$$

$$\underline{3.0. \quad 2.0. \qquad 1.0. \quad 1.2. \qquad 0.2. \qquad\qquad\qquad}$$

$$(3y^2 - 4ay + a^2 + x^2)\,u + (2xy - 4ax)\,z.$$

Man erhält alſo folgende 3 Gleichungen (17. §.) I. $y^3 - 2ay^2 + ay^2 + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. Dieſe letzte Gleichung wird nun die bequemſte ſeyn, hiedurch den Werth des x zu beſtimmen. Doch, weil ſelbe ſich nicht aufhebt, als in dem Falle, daß man das $y = 2a$ oder das $x = 0$ annehme, ſo ſetzen wir einmal, weil man doch den Werth des x unterſuchen ſoll, daß $y = 2a$: hiemit verwandelt ſich die gegebene Gleichung (16. §.) in folgende: $12a^2 - 8a^2 + a^2 + x^2 = 5a^2 + x^2 = 0$; und alſo wird $x = \pm a\sqrt{-5}$, welche Auflöſung denn wegen der negativen Wurzel unter die Reihe der unmöglichen gehört. Man muß ſich alſo zu einer andern wenden, und nach dem geſagten das $x = 0$ annehmen. In dieſem Falle wird die vorgeſetzte zwote Gleichung nämlich $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$ in $3y^2 - 4ay + a^2 = 0$ abgeändert werden, wo denn $y^2 - \frac{4}{3}ay = -\frac{1}{3}a^2$ und nach vollkommen erſetzten Quadrate und ausgezogener Wurzel bekömmt man endlich das $y = \frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$; das iſt: $y = a$, $y = \frac{a}{3}$. Rücke man nun in der erſten Gleichung ſtatt des y die erſte Wurzel a ein, und nehme man zugleich $x = 0$ an, ſo wird ſeyn $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Es hat alſo die krumme Linie, welche zu dieſer Gleichung gehört (16. §.), einen vielfachen und zwar einen zweyfachen Punct (9. §.), wovon die Abſciſſe $= 0$, die Ordinate $= a$ iſt. Die andere Wurzel nämlich $\frac{a}{3}$ iſt, wie man ſieht, zur weitern Berechnung unbrauchbar. Allein man könnte weiters fragen, ob dieſer Punct etwa nicht dreyfach ſey. Man unterſuche alſo die zwote Reihe der abgeänderten Gleichung (16. §.).

$$\begin{array}{l}3y^2u - 4ayu + a^2u + 2xyz + 4axz + x^2u \\ \underline{\tfrac{2}{2}.\ 0.\quad \tfrac{1}{2}.0.\quad 0.0.\quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\quad 0.\tfrac{1}{2}.\quad \tfrac{2}{2}} \\ 3yu^2 - 2au^2 + xuz + yz^2 - 2az^2 + xuz. \\ (3y - 2a)u^2 + 2xuz + (y - 2a)z^2.\end{array}$$

Man überkömmt alſo folgende Gleichungen: I. $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. IV. $3y - 2a = 0$. V. $2x = 0$. VI. $y - 2a = 0$. Wir haben aber erſt gezeigt, daß, wenn wir $y = 2a$ annehmen, die Auflöſung unter die unmöglichen müſſe gezählet werden. Nimmt man aber aus der 5ten angeſetzten Gleichung des $x = 0$, ſo wird die erſte Gleichung in $y^3 - 2a^2y + a^2y = 0$; oder in $y^2 - 2ay + a^2 = 0$ verwandelt, wo man denn zwo gleiche Wurzel überkömmt; nämlich $y = a$ und $y = a$. Die ſechſte Gleichung gilt endlich $y = 2a$. Weil es aber unmöglich iſt, daß auf einem einzelen Punct eine zweyfache Abſciſſe ruhe, ſo iſt der unterſuchte Punct der krummen Linie keineswegs dreyfach.

20. §.

20. §.

Fünftes Beyſpiel.

Nach den angeführten Regeln (17. 18. §§.) werde ich nun auch für den nämlichen Fall als es im letzt berechneten Beyſpiele geſchehen (19. §.) auch die oben angeſetzte Gleichung (7. §.) unterſuchen, wo es denn nicht mehr nöthig ſeyn wird, ſich auf die ſchon bekannte Methode (17. 18. 19. §§.) zu beziehen.

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$

4. 3. 2.1. 2. 1.1. 2. 1.

$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu +$

$\frac{3}{2}.$ $\frac{2}{2}.$ $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.$ $\frac{2}{2}.$ $\frac{1}{2}.$ $\frac{1}{2}.$

$48yz + 8xz - 64z$

$\frac{1}{2}.$ $\frac{1}{2}$

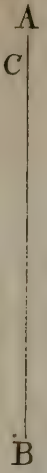
$6y^2u - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yuz - 12yuz + 16u^2 +$
$24uz + 24uz + 4z^2.$

Hieraus laſſen ſich folgende 6. Gleichungen anſetzen: I. $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$. II. $4y^3 - 24y^2 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x = 0$. III. $-12y^2 + 48y + 8x - 64 = 0$. IV. $6y^2 - 24y^2 - 12x + 16 = 0$. V. $-24y + 48 = 0$. VI. $4 = 0$. Mittels der fünften Gleichung iſt $48 = 24y$, und alſo $y = 2$. Rückt man dieſen Werth in die vierte Gleichung ein, ſo wird $24 - 48 - 12x + 16 = 6 - 12 - 3x + 4 = 0$; hiemit $x = -\frac{2}{3}$. Iſt $y = 2$, und überſetzt man davon den Werth in die dritte Gleichung, ſo wird $-48 + 96 - 64 + 8x = -6 + 12 - 8 + x = -2 + x = 0$, hiemit $x = 2$. Setzt man nun dieſen Werth des x, wie auch den erfundenen von y in die vorigen 6. Gleichungen I. $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 121 = 0$, II. $32 - 96 - 96 + 64$

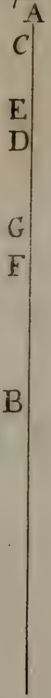
+ 96

$+ 96 = 0$. III. $- 48 + 96 + 16 - 64 = 0$. IV. $24 - 48 - 24 + 16 = 0$. V. $- 48 + 48 = 0$. VI. Iſt eine nicht mögliche Gleichung. Unterſchiebt man nun die Werthe $x = 2$ und $y = 2$, ſo werden ſich nur die erſten drey Gleichungen tilgen; die andern drey aber kommen nicht einmal übereins, hiemit iſt der Punct nur zweyfach (9. §.).

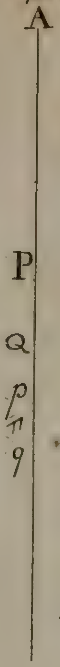
pag. 151



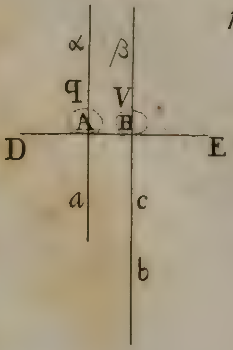
p. 152



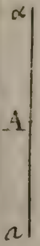
p. 163



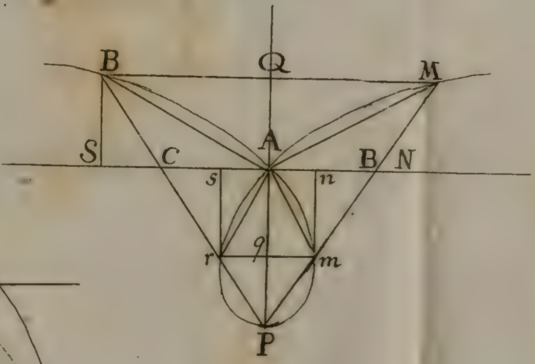
p. 158


α
β
q
V
A
B
D
E
a
c
b

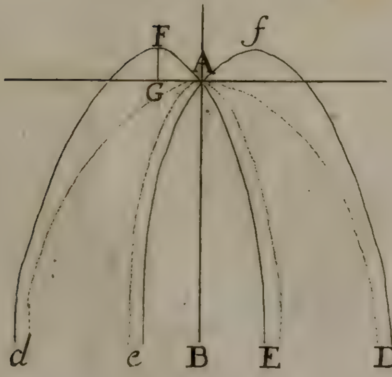
p. 156



p. 196


B
Q
M
S
C
A
B
N
s
n
q
r
m
P

p. 194



Leonard Grubers
Benediktiners vom Kloſter Metten,
einige

Grundſätze
der
Theorie der Centralkräfte,
in Rückſicht
auf die
Aſtronomie.

Vorbericht.

Man kann wohl ſagen, daß die Vollkommenheit der Aſtronomie meiſtens von der mehreren Aufklärung, Ausbreitung und Auszierung der Theorie der Centralkräfte abhängt. Newton; dieſer groſſe Newton hat uns davon die erſten Grundſätze, welche ſich in den allgemeinen Geſetzen der Natur ſelbſt gründen, aufgedecket. Er hat uns in ſeiner ſo erhabenen als einfachen Theorie der anziehenden Kraft das ächte Bildniß der wirkenden Natur anſchauen gelehret. Von dieſen Zeiten mag man wohl die glücklichen Epochen einer gegründeten, einer aufgeklärten Aſtronomie herzählen. * Man läßt ſich auch jetzt noch ſehr angelegen ſeyn, die Theorie dieſer anziehenden Kraft mehr und mehr aufzuklären, mit noch mehr dringenden Beweiſen zu unterſtützen, und ſelbe nach ihrem ganzen Umpfange auszubreiten. Die geſchickteſten Mittel ſind hiezu ohne Zweyfel eine richtige Mechanik-Lehre und höhere Geometrie. Ich will davon in dieſer Abhandlung ein Beyſpiel geben, und einige vornehmere Grundſätze von der Theorie der anziehenden Kraft, welche eben in ſich nicht ſo bekannt und aufgeklärt, als nutzbar ſelbe in Rückſicht auf die Aſtronomie ſind, aus den Grundſätzen einer neueren und verbeſſerten Mechanik und höheren Geometrie herzuleiten, mir angelegen ſeyn laſſen; indem ich zei-

---

*) La Decouverte de l'Attraction ouvrit, pour ainſi dire, aux Philoſophes un nouveau ciel. Mr. de la Lande en Aſtron. Livr. XIX. §. 2420.

gen werde, was man daraus für nützliche und vortheilhafte Theoremes ſowohl für verſchiedene Gegenſtände der Anziehungskraft ſelbſt als der davon abhangenden Anwendungen auf die verſchiedene Kreutzungen des Planetenlaufes wird machen können. Eines muß ich noch anmerken, daß ich nach dem Beyſpiele anderer Mathematiker die in dieſer Theorie durch gewiſſe Buchſtaben feſtgeſetzten Ausdrücke, und deßwegen auch einige Figuren für meine Beweiſe beybehalten habe; und obſchon ich einige ſonderliche Lehrſätze aus der Lehre von den Kegelſchnitten angeſetzet habe; ſo nehme ich davon einige leichtere Sätze aus der gemeinern Mechanik und Geometrie als bekannt an; um in Anführung der Beweiſe dieſer überall ſchon feſtgeſtellten Sätze nicht gar zu ſehr ausſchweifen zu dürfen, weil ohne das dieſe Abhandlung nicht den Ruhm eines gelehrten Werkes, ſondern nur das Zeugniß eines geringen Kenntniſſes und weniger Uebung in der aſtronomiſchen Haupttheorie von den Centralkräften zu ihrem Gegenſtand hat.

⁂

Einige Grundſätze der Theorie der Centralkräfte in Rückſicht auf die Aſtronomie.

1. §.

Der Satz, daß man eine jede Centralkraft, welche in ſehr kleinen Zeitpuncten ſich äußert, als eine einförmige Zunehmungs- oder Beſchleunigungskraft annehmen könne, iſt in der Theorie der Centralkräfte ſchon allgemein geworden. Wir wollen wegen eines vollkommnern Zuſammenhangs und leichtern Begrifs des Nachfolgenden den Beweis dieſes bekannten Theorems hier einrücken. Es ſey (1. Fig.) APD eine Umkreislinie; Pp ſoll davon einen unendlich kleinen Bogen vorſtellen. PVNP ſey endlich der küßende Zirkel. Weil man nun den unendlich kleinen Bogen eben aus der Urſache, daß er unendlich klein iſt, als eine gerade Linie annehmen kann, ſo bekömmt man folgende Gleichung der Verhältniße: $PE : PQ = PQ : PN$; und hernach $PH : Pp = Pp : PN$. Hiemit iſt $PQ^2 = PE. PN$; und $Pp^2 =$

PH. PN. Deßwegen iſt auch $PQ^2 : Pp^2 = PE : PH$. Aus der nämlichen Urſache, daß man Pp als unendlich klein annimmt, ſo kann man $QI = PE$ und $pi = PH$ betrachten; hiemit wird $PQ^2 : Pp^2 = QI : pi$. Man kann auch das QI zu pi und das QR zu pF als parallel annehmen: folglich würden die Dreyecke QIR und piF einander ähnlich ſeyn, und alſo iſt $QR : pF = QI : pi$, aus welchem auch endlich die Analogie $QR : pF = PQ^2 : Pp^2$ fließt. Nun aber werden durch PQ und Pp die Zeitpuncte; durch QR aber und pF die Centralkräfte angezeiget. Weil alſo die Centralkraft in dieſem Falle mit der Beſchleunigungskraft die nämliche Analogie beybehält, ſo mag man dieſe für jene annehmen.

2. §.

Wenn wir durch f, durch S den Raum; durch t die Zeit anzeigen, ſo iſt $f = \frac{S}{tt}$. Es iſt aber der Raum oder $S = pF$; denn durch dieſes wird die Bewegung durch die Centralkraft bis in p ausgedrückt; es iſt alſo $f = \frac{pF}{tt}$; und, weil in der einförmigen Beſchleunigungskraft $t = 1$, ſo wird $f = pF$.

3. §.

Die Zeiten ſind wie die Summe der Sectorn oder der Dreyecke; hiemit iſt auch t oder die Zeit für Pp = dem Dreyecke SpP oder SFP. Der Innhalt aber des erſten Dreyeckes iſt $= SP \times pM$, des zweyten $= ST \times PF$; das iſt = dem Factum der Grundlinien und ihrer Höhen. Wenn man nun in der vorher angeſetzten Formel (2. §.) ſtatt des t ſeinen Werth beybehält, ſo bekömmt man $f = \frac{pF}{SP^2 . pM^2}$; oder auch $f = \frac{pF}{ST^2 . PF^2}$.

4. §.

Aus den Eigenſchaften des Zirkels wiſſen wir, daß das Quadrat einer Tangente gleich ſey dem Factum aus den Secanten. Es wird alſo $PF^2 = pF . pB$, und weil wir pP als unendlich klein angenommen haben (1. §.), ſo iſt $pB = PV$; hiemit $pF = \frac{PF^2}{PV}$; deſſen Werth, wenn wir ſelben in vorher geſetzter Formel (3. §.) einrücken, ſo wird $f = \frac{PF^2}{ST^2 . PV . PF^2} = \frac{1}{ST^2 . PV}$.

5. §.

Die zwey Dreyecke STP und PVN ſind einander ähnlich; und alſo iſt $SP : ST = 2PG : PV$; hiemit $PV = \frac{ST . 2PG}{SP}$; und $PV . ST^2 = \frac{ST^3 . 2PG}{SP}$, welchen Werth wir in die vorige Formel $f = \frac{1}{ST^2 . PV}$ (4. §.) überſetzen können, daß wir alſo $f = \frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ überkommen.

6. §.

In der zwoten Figur kann man wegen der Aehnlichkeit der zweyen Dreyecke SPT und QPV folgende Proportion anſetzen;

$SP : ST = PQ : QV$, und alſo werden wir dieſe nämliche Analogie in $SP + PQ : ST + QV = SP : ST$; das iſt in $2CA : 2CK$ (weil dieſe die mittere arithmetiſche Proportionallinie iſt) $= SP : ST$ abändern können. Nun wiſſen wir aber aus der Lehre von den Kögelſchnitten, daß in einer Ellipſe $SP : ST = CA : CK (PD)$, wo denn wiederum das Factum bey den Durchmeſſern = dem Vierecke aus den halben Axen: und alſo $CA : PD = CN : CB$; deßwegen auch ſeyn wird $SP : ST = CN : CB$; folglich $ST = \frac{CB.\,SP}{CN}$. Wenn man ferner den halben Durchmeſſer des küſſenden Zirkels in Betracht ziehet; ſo wird $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Es iſt aber aus der angeſetzten Proportion das $PD = \frac{CA.\,CB}{CN}$; hiemit $PG = \frac{CN^3}{CA.\,CB}$. Setzen wir nun in der vorigen Formel (5. §.) ſtatt des ST und PG ihren Werth, ſo bekommen wir das $f = \frac{CA}{SP^2.\,C^2B^2}$: es ſind aber CA und CB unveränderliche Größen; hiemit wird $f = \frac{1}{SP^2}$. In einer Hyperbole alſo kann man die nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft durch die Gleichung $f = \frac{1}{SP^2}$; das iſt, durch das verkehrte Verhältniß des quadrirten Radius Vector am ſicherſten ausdrücken.

7. §.

Eben dieſe Gleichung nämlich $f = \frac{1}{SP^2}$ kann man auch in der Parabole anſetzen. Denn, wenn man in dem Dreyecke STH (3. Fig.) aus dem erſten Winkel eine ſenkrechte Linie AT

herab⸗

herabfallen läßt, ſo iſt $ST^2 = SA.\,SH$. Es iſt aber $SH = SP$; hiemit $ST^2 = SA.\,SP$; und alſo auch $ST^6 = SA^3.\,SP^3$. So iſt nun der Radius des küſſenden PG in einer Parabole $= \frac{DP^3}{4AS^2}$. Weiters iſt $DP = 2ST$ (denn es iſt die Analogie $HP : PD = HT : TS$; überdas $HP = 2HT$; folglich iſt $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$; und $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Deßwegen, wenn wir in der oben angeführten Formel $\frac{SP}{ST^3.\,2PG}$ (5. §.) den Werth von 2PG, nachmals den Werth von $4ST^6$ anſetzen, ſo wird $f = \frac{1}{4SP^2.\,AS}$, und nach weggelaſſenen unveränderlichen Größen iſt $f = \frac{1}{SP^2}$; das iſt, in der Parabole bekömmt man die nämliche Formel, welche wir vorher für die in einer Ellipſe oder Hyperbole nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft angeführt und bewieſen haben (6. §.).

8. §.

Wenn mehrere Körper mit ihren Centralkräften, welche nach einem gemeinen Brennpunct gerichtet ſind; und durch die Formel $\frac{1}{SP^2}$ mögen ausgedrücket werden, (6. 7. §§.) in der Laufbahne Kögelſchnitte beſchreiben, ſo ſind die Räume im Quadrat wurzlichten Verhältniſſe der Parameter. Denn, weil nach dem bekannten Ausdrucke π oder der Parameter $= \frac{2CB^2}{CA}$; und wir vorher $f = \frac{AC}{SP^2.\,CB^2}$ bekommen haben (6. §.), ſo wird $f =$

$\frac{1}{SP^2.\pi}$. Wir haben aber ſchon oben bewieſen, daß $f = \frac{pF}{SP^2.PM^2}$ (3. §.); hiemit $\frac{1}{SP^2.\pi} = \frac{pF}{SP^2\,PM^2}$. Nun iſt weiters pF, durch welches die Centralkraft ausgedrücket wird (2. §.), dem $\frac{1}{SP^2}$ gleich (6. 7. §§.), folglich, wenn man dieſen Werth dafür annimmt, ſo wird $\frac{PF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2.PM^2}$ und alſo $\pi = SP^2.PM^2$; hernach $\sqrt{\pi} = SP.PM$. Es iſt aber $SP.PM$ mit dem Raume oder Sector in einem Verhältniſſe (3. §.): alſo auch $\sqrt{\pi}$ oder der quadratwurzlichte Parameter wie die Räume ꝛc.

9. §.

Die Geſchwindigkeit läßt ſich in einem unendlich kleinen Zeitraum durch Pp ausdrücken (1. §.). Weil nun die Dreyecke SPT und pMB einander ähnlich ſind, ſo überkömmt man eine Analogie, nämlich $ST : SP = pM : pD$, wo $pP = \frac{SP.PM}{ST}$. Es iſt aber $SP.PM = \sqrt{\pi}$: (§. 8.) folglich $pP = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$. Das iſt: die Geſchwindigkeit iſt in einem geraden quadratwurzlichten Verhältniße des Parameter, und umgekehrten Verhältniſſe des Perpendikels.

10. §.

Je weitläuftiger der Raum einer Ellipſe, welchen wir a heißen wollen, iſt; oder je kleinere Theile der bewegte Körper in ſeiner Laufbahne beſchreibet, um ſo größer iſt die Zeit des Umlaufes; das iſt $t = \frac{a}{s}$. Nun ſind aber die Räume oder S mit $\sqrt{\pi}$

in einem Verhältniſſe (§. 8.) ſo iſt alſo auch $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ und $a = t \sqrt{\pi}$. Es ſtehet alſo a oder die Größe des Raums einer Ellipſe in einem Verhältniſſe, welches aus dem quadratwurzlichten Verhältniſſe des Parameters der größern Axe und der einfachen Zeit von dem ganzen Umlaufe zuſammengeſetzet iſt.

11. §.

Es ſey in einer Ellipſe die kleinere Axe $= b$, die größere oder Hauptaxe $= d$; der Parameter von dieſer ſey $= \pi$. Aus der Theorie der Kegelſchnitte wiſſen wir, daß $d\pi = b^2$, hiemit die ganze Gleichung durch d^2 multipliciret giebt $d^3 \pi = b^2 d^2$. Es iſt nun die Größe des Raums in einer Ellipſe wie ein anderes Viereck; das iſt: $a = b\, d$. Wir haben aber erſt gleich oben (§. 10.) geſehen, daß $a = t \sqrt{\pi}$: ſo iſt nun auch $b d = t \sqrt{\pi}$ und $b^2 d^2 = t^2 \pi$: und, wie wir jetzt geſagt haben, ſo iſt $b^2 d^2 = d^3 \pi$; deßwegen iſt nach geſchehener Einſchaltung des Werths von $b^2 d$ klar, daß $d^3 \pi = t^2 \pi$, und alſo $d^3 = t^2$, oder $t = \sqrt{d^3}$. In einer Ellipſe verhält ſich alſo die periodiſche Zeit, wie die Quadratwurzel des Cubus von der größeren Axe.

12. §.

Aus dieſem nun laſſen ſich die Verhältniſſe für die wahren Durchmeſſer, für die Fläche und körperlichen Innhalt der Planeten beſtimmen, welche wir, weil ſie ohnedem ſehr bekannt ſind, weglaſſen wollen.

13. §.

Damit ein Körper bey abwachſender Centralkraft die nämliche Ellipſe beſchreibe, ſo muß die Linie der beyden Apſiden nach demjenigen Theil, in welchem der Körper ſich beweget, gewendet werden. Hingegen, wenn die Centralkraft anwächſt, ſo richtet ſich die Apſiden Linie nach dem gegenſeitigen Theile.

14. §.

Man wird auch ganz leicht begreifen, daß in einem Zirkel, in deſſen Mittelpuncte die Centralkraft überall die nämliche iſt, und alſo ein ſolcher Zirkel keinen anderen Küſſenden als ſich ſelbſt hat, alle SP, ST ſeyn $= 1$, und alſo auch $f = 1$.

15. §.

Wenn man hingegen den Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct eines Zirkels z. E. in S anſetzet (Fig. IV.), und annimmt, daß der Körper in P ſey, und einen unendlich kleinen Bogen PQ beſchreibe, ſo werden wir aus der vorigen Formel $f = \frac{pF}{ST^2 . PM^2}$ (§. 3.) für dieſen Fall $f = \frac{PR}{ST^2 . PQ^2}$ überkommen. Nun wird aus der Theorie für die Eigenſchaften des Zirkels bewieſen, daß $PQ^2 = PO \times PB$; Es iſt aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke POR und PVB ausgemacht, daß $PO : PR = PV : PB$, und alſo $PO = \frac{PR . PV}{PB}$: Deßwegen rücke man dieſen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein, ſo erhält man $PQ^2 = \frac{PR . PV . PB}{PB} = PR . PV$. Dieſen Werth des PQ^2, wenn man ihn in der allgemeinen Formel anſetzet, ſo bekömmt man $f = \frac{PR}{ST^2 . PR . PV} = \frac{1}{ST^2 . PV}$. Ferner ſieht man, daß die Dreyecke PBV und STP ſich ähnlich ſind (denn den Winkel VPT mißt der halbe Bogen PV, welcher gleichfalls das Maaß des Winkels VBP iſt; wie auch ſind die Winkel bey T und $V = 90'$): hiemit iſt $PB : PV = SP : ST$; und alſo $ST^2 = \frac{PV^2 . SP^2}{PB^2}$, welcher Werth die vorige Formel in $f = \frac{PB^2}{PV^2 . PV . SP^2}$ verwandelt: und weil PB eine unveränderliche Größe anzeiget, ſo wird $f = \frac{1}{PV^3 . SP^2}$; oder dieſe Formel mit Worten auszudrücken, ſo iſt die Centralkraft, wenn ſelbe außer den Mittelpunct eines Zirkels angeſetzet wird, allzeit in dem umgekehrten Verhältniſſe, welches aus dem Cubus der Sehne, ſo durch den Mittelpunct der Kraft und die Lage des Körpers gezogen wird, und aus dem Quadrat des Radius Vector zuſammengeſetzet iſt.

16. §.

Will man nun wiſſen, was für eine Größe oder wie viel Theile des Durchmeſſers ein Körper, welcher aus A (Fig. V.) vermög ſeiner natürlichen Schwere herabfällt, beſchreibe, auf daß er jene Geſchwindigkeit überkomme, welche ihm nöthig iſt, einen halben Umkreis des Zirkels zu durchlaufen, ſo ſetze man vor allem den Bogen AM als unendlich klein, und alſo als eine gerade Linie an. Wenn man nun die Abſciſſe AP annimmt, daß ſie der Centralkraft gleichkömmt, und daß AP in dem nämlichen Zeitraum beſchrieben wird, in welchem der Körper den Bogen AM durchläuft, ſo iſt $AP : AM = AM : AB$: und alſo $AP = \frac{AM^2}{AB}$. Man ſetze nun ferner, daß der Körper in einer einförmig zunehmenden Bewegung weiters in L herabfalle, hiemit auch indeſſen mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Zirkel bis in Q fortrücke, ſo wird man (wenn AM und AQ die Zeit ausdrücken) eine neue

Ana=

Analogie $AP : AL = \frac{AM^2}{AB} : \frac{AQ^2}{AB}$ bekommen. Man kann nun dieſe in $AP : \frac{AM^2}{AB} = AL : \frac{AQ^2}{AB}$ verändern. Wir haben aber allererſt bewieſen, daß $AP = \frac{AM^2}{AB}$; es iſt alſo auch $AL = \frac{AQ^2}{AB}$. Weil aber AQ im Ende ſeiner Geſchwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung, AL mit einer beſtändig zunehmenden iſt beſchrieben worden, ſo iſt $AQ = 2\,AL$, und $AQ^2 = 4\,AL^2$. Deßwegen, wenn man dieſen Werth in der Gleichung $AL = \frac{AQ^2}{AB}$ für AQ^2 anſetzt, ſo bekömmt man endlich $AL = \frac{4\,AL^2}{AB}$, und $AL.\ AB = 4\,AL^2$; nachmals $AB = 4\,AL$, und endlich $AB = 4\,AL$, wie auch $AL = \frac{1}{4}\,AB$. Das Maaß der Geſchwindigkeit alſo iſt in dieſem Falle ein halber Radius oder der vierte Theil von einem Durchmeſſer.

17. §.

Suchen wir einen allgemeinen Ausdruck oder Formel für die Centralkraft, wenn der Mittelpunct der Kräfte in den Mittelpunct einer Ellipſe, nämlich in S (VI. Fig.) geſetzt wird, ſo müſſen wir wiederum die Formel $f = \frac{SP}{ST^3.\ 2PG}$ (5. §.) für uns nehmen, und weil 2PG oder das zweyfältige des halben Durchmeſſers des küſſenden Zirkels iſt $= \frac{2SD^2}{ST}$, ſo bekommen wir $f = \frac{SP.\ ST}{ST^3.\ 2SD^2} = \frac{SP}{ST^2.\ 2SD^2}$. Aus der Theorie der Kögelſchnitte kann man ferner in einer Ellipſe die Analogie $SD.\ ST = SB.\ SA$ ge-

gebrauchen, wo $SD^2 = \frac{SB^2 . SA^2}{ST^2}$: deßwegen wird $f = \frac{SP . ST^2}{ST^2 . 2SB^2 . SA^2} = \frac{SP}{2SB^2 . SA^2}$: es ſind aber SB und SA unveränderliche Größen, deßwegen bleibt $f = SP$.

18. §.

Das Verhältniß der periodiſchen Zeit in einer Ellipſe zu einem Zirkel zu finden, ſo wollen wir (7. Fig.) für den Zirkel die Größe des Raumes $= A$, für die Ellipſe aber $= a$; den Sector $AMS = S$, den andern Sector $ANS = s$; die Zeit für den Zirkel $= T$; für die Ellipſe $= t$ annehmen. Nun ſind die Perioden der Zeit in dem geraden Verhältniſſe der Räume und in dem umgekehrten der Zeiten; hiemit $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$. Weiters hält der Raum eines Zirkels zu der Größe eines elliptiſchen Raumes eben das Verhältniß, welches die groſſe oder Hauptaxe zu der kleinern Axe beybehält; das iſt: $A : a = SD : SG$. Deßwegen wird die vorige Proportion durch Unterſchiebung des Werthes in $T : t = \frac{SD}{S} : \frac{SG}{S}$ verwandelt. Es ſind aber auch die Sectores wie die Größen der Räume; und dieſe wie die Axen: ſo iſt denn auch $S : s = SD : SG$; oder nach dafür angeſetztem Werthe wird $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SG}{SG}$ das iſt $T : t = 1 : 1$, hiemit $T = t$.

19. §.

Wenn ein Körper aus dem oberſten Puncte der Apſidenlinie in die b geſetzt wird, ſo iſt die Geſchwindigkeit in einer Ellipſe, wo der Mittelpunct der Kräfte in S iſt, nicht ſo groß, als ſelbe iſt in einem Zirkel, welchen man aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS (8. Fig.) beſchreibet. Dieſes zu beweiſen, ſo nehmen wir AP zur Abſciſſe an, und ziehen wir zur ſelben die Ordinaten PN, PM. Es iſt nun richtig, daß AN und AM zur nämlichen Zeit beſchrieben werden, in welcher der Körper durch AP ſich beweget. Gleichwie nun $AP = AP$, ſo iſt auch $AN = AM$, wenn ſie ſich nämlich auf die Zeit beziehen. Allein, obſchon AP oder die Centralkraft beſtändig die nämliche iſt, ſo iſt doch in ſich ſelbſt $AM > AN$: die Ungleichheit alſo der Geſchwindigkeit muß ſich auf die Tangentialkraft gründen. Daß aber M über das N hinaus fallen muß, iſt die Urſache, weil der halbe Durchmeſſer des küſſenden Zirkels dem Quadrate des conjugirten Diameters, welcher in dieſem Falle die halbe kleinere Axe iſt, gleichet, welches Quadrat man hernach mit der ſenkrechten Linie, deſſen Stelle die halbe größere Axe vertritt, muß getheilet werden. Es iſt alſo $2PG = \frac{b^2}{a}$: aber auch $\frac{1}{2}\pi$ iſt $= \frac{b^2}{a}$ (11 §.): folglich iſt der halbe Durchmeſſer des küſſenden Zirkels im Scheitelpuncte dem halben Parameter gleich: es iſt aber $\frac{1}{2}\pi < AS$, denn $\frac{1}{2}\pi = PN$, welches ja kleiner iſt als die halbe kleinere Axe, und folglich noch viel kleiner als die halbe größere Axe, hiemit auch $PN < AS$; der ganze Zirkel alſo fällt für die Ellipſe hinaus.

20. §.

Wird ein Körper aus dem unterſten Puncte der Apſidenlinie zur Bewegung hingeriſſen, ſo iſt die Geſchwindigkeit in einer Ellipſe, wo der Mittelpunct der Kräfte in S geſetzet wird, größer als die Geſchwindigkeit in einem Zirkel, welcher aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS beſchrieben wird (9. Fig.). Denn, wenn man wiederum AP für die Abſciſſe nimmt, ſo werden

den die Bögen A M und A N in der nämlichen Zeit durchgelaufen: weil aber A N > A M, ſo muß in der Ellipſe eine größere Geſchwindigkeit ſeyn. Die Centralkraft bleibt aber die nämliche, alſo iſt davon der Unterſchied von der Tangentialkraft herzuleiten. Hiemit iſt in einer Ellipſe die Tangentialkraft größer als in einem Zirkel. Weiters fällt der ganze Zirkel in den Raum der Ellipſe; denn, wie wir erſt oben (§. 19.) geſagt haben, ſo iſt $\frac{1}{2}\pi$ = dem halben Durchmeſſer des küſſenden Zirkels; hernach iſt $\frac{1}{2}\pi$ in dieſem Falle gröſſer als A S, und eine halbe Axe iſt auch größer als der halbe Durchmeſſer des küſſenden Zirkels: deßwegen wird der küſſende Zirkel niemals die Ellipſe berühren, viel minder über ſelbe hinaus fallen können.

21. §.

In dem Falle, daß die Centralkraft die nämliche ſey, und der Körper aus dem unterſten Punct der Apſidenlinie zur Bewegung hingeriſſen werde, ſo läßt ſich fragen, in welchem Kegelſchnitte die Geſchwindigkeit größer ſey. Dieſe Frage zu erörtern ſey (Fig. 10.) A der unterſte Punct in der Apſidenlinie und zugleich der Scheitelpunct für die Kegelſchnitte, welche ſollen beſchrieben werden; S ſey der Mittelpunct der Kräfte. Man nehme nun den Punct P, wo A P die Centralkraft ausdrücket, und richte daſelbſt die Ordinate P L auf. In A ziehe man eine Tangente A Q = A S. Aus der Beſchreibung der Kegelſchnitte, und aus ihren Eigenſchaften wiſſen wir, daß in der Parabole A S gleich ſey dem Abſtande der Leiterin (Linea directrix) von dem coniſchen Scheitelpuncte. In der Ellipſe iſt aber dieſer Abſtand der Leiterin größer, und in der Hyperbole kleiner als A S. Deßwegen, wenn ich außer dem A eine Linie A R nehme, und noch vorher A S in A *b* überſetze; nachmals zwiſchen A und *b* den Punct B;

und endlich außer dem *b* den Punct *β* anmerke, ſo iſt es richtig, daß in B die Leiterin der Hyperbole, in *b* die Leiterin der Parabole, in *β* die Leiterin der Ellipſe anzutreffen ſey. Ziehe man nun aus dieſen Puncten durch Q die Tangenten, ſo wird die Tangens der Ellipſe in der Ordinate PL den kleinſten Theil, die Tangens der Parabole einen größeren, die Tangens der Hyperbole den größten Theil abſchneiden. Die Ordinaten aber drücken die Tangentialkraft aus; deßwegen, weil man angenommen hat, daß die Centralkraft die nämliche ſey, ſo wird in der Hyperbole die größte, in der Parabole eine mindere, in der Ellipſe endlich die kleinſte Geſchwindigkeit oder Tangentialkraft ſeyn.

22. §.

Eben dieſes kann man aus der Beſchreibungsforme der Kegelſchnitte herleiten. Es ſey (Fig. XI.) z. B. M. N. eine unbeſtimmte Linie. In S ſetze man den Brennpunct der Kegelſchnitte, alſo zwar, daß ſelbe die Linie M N in P berühren. Nun wird SP den Radius vector oder die Centralkraft für alle als gleich ausdrücken. Man laſſe weiters aus S in MN eine ſenkrechte Linie ST herab fallen, und man ziehe eine ihr gleiche T K, wie auch aus K durch P eine andere unbeſtimmte. Nun wird man in dieſer alle Brennpuncte der Kegelſchnitte antreffen, welche nämlich alſo beſchrieben werden, daß ſie ihren Brennpunct in *S* haben und die Linie M N in P berühren. Denn nehme man in ſelber einmal einen Punct F, ſo wird K F die Axe; S F der Abſtand der zween Brennpuncte. Theilen wir S F in C in gleiche Größen, ſo bekommen wir in C den Mittelpunct der Ellipſe. Schneide man hernach K F entzwey und überſetze man ſie aus C über das S und F hinaus, ſo bekömmt man die Axe A B, und die Ellipſe APF. Nimmt man ferner F in einem unendlich groſſen Abſtande an, oder zieht man durch S eine Pa-

Parallele zu K F, welche nämlich in einem unendlich entfernten Abſtande ſich mit K F vereiniget, ſo bekömmt man durch G S die Lage einer Parabole; und, wenn man aus K auf dieſelbe eine ſenkrechte Linie K G herabfallen läßt, ſo wird dieſe die Leiterin ſeyn; da hingegen die Linie G S, wenn man ſie entzwey ſchneidet, den Scheitelpunct *a* beſtimmet, und die Parabole in P berühret wird. Wenn man endlich in der nämlichen Linie auſſer K einen Punct ϕ annimmt, und dieſen mit S vereiniget, ſo wird ϕ S die Lage der Axe und ϕ K die Axe, welche, wenn ſie in S ϕ, ſo vorher ſchon in C entzwey geſchnitten wird, auf beyde Seiten in *a* und *a* überſetzt iſt worden, ſo wird *a* den Scheitelpunct anmerken; und die Hyperbole in P berühret werden. Wir haben nun ſchon vorher das Verhältniß der Geſchwindigkeit, welche wir jetzt V heißen wollen, durch eine Formel angezeigt (§. 9.); nämlich $V = \frac{\surd \pi}{ST}$, und weil S T in dieſem Falle unveränderlich iſt, ſo wird $V = \surd \pi$ oder $V^2 \pi$. Es iſt aber nach den bekannten Gleichungen der Kegelſchnitte in einer Ellipſe der $\frac{1}{2}\pi = \frac{2ac - c^2}{a}$; in der Parabole $\frac{1}{2}\pi = 2c'$; in der Hyperbole $\frac{1}{2}\pi = 2ac + c^2$, deßwegen, wenn wir dieſe Gleichungen in Analogien auflöſeu, ſo bekommen wir I. $a : 2a - c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a - c < 2a$, hiemit auch $\frac{1}{2}\pi < 2c$. II. $\frac{1}{2}\pi = 20$. III. $a : 2a + c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a + c > 2a$, und alſo auch $\frac{1}{2}\pi > 2c$. Folglich iſt $\frac{1}{2}\pi$ in der Hyperbole am größten, in der Parabole nicht ſo groß, in der Ellipſe aber kleiner: Wir haben aber gleich jetzt geſagt, daß die Geſchwindigkeit oder $V^2 = \pi$; hiemit iſt auch dieſe oder die Tangentialkraft in einer Hyperbole die größte, in einer Parabole minder groß, und in der Ellipſe am kleinſten.

23. §.

Erſter Lehnſatz.

Wenn man in einer Ellipſe oder Hyperbole (12. und 13. Fig.) durch den Mittelpunct C eine Linie ziehet, alſo zwar, daß ſelbe zu der Tangente TMX parallel ſey, ſo wird ſie zwiſchen E π und M einen Theil der geraden Linie FM (12. Fig.) oder fM (13. Fig.) einſchlieſſen, welcher der halben Hauptaxe gleichkömmt. Es ſey alſo in der Ellipſe (12. Fig.) die Linie KCD zu der Tangente XT parallel. Man vereinige das M mit f und F, und ziehe überdas eine ſenkrechte Linie MN, welcher in O eine andere fQ zu KD und TX parallel entgegen läuft. Weil nun $fMT = XMQ$, und $MfO = MQO$, wie auch $QMO = OMf$, ſo ſind die Dreyecke QOM, fOM einander ähnlich und gleich: und deßwegen wird auch $Mf = MQ$. Es iſt aber $FM + Mf = Ss$ oder der Hauptaxe gleich; weiters, weil $FC = Cf$ und CE zu fQ parallel iſt, ſo folget, daß $FE = EQ$. Deßwegen iſt EQ die Semidifferenz zwiſchen Mf oder MQ und MF, welche alſo, wenn man ſie zur QM hinzuſetzet, die halbe Summe der geraden Linien FM und Mf ausmachen.

In der 13. Fig. ſey CQ zu XT parallel. Ziehe man nun durch F und M eine unbeſtimmte Linie, welche in Q und H den geraden und zu XT parallelen Linien CQ und FH entgegen kömmt. Die unter ſich gleiche Winkel TMH, XMf ſind auch ihren abwechſelnden gleich, nämlich $= MHf$, MfH; ſo iſt denn auch $fM = MH$. Hernach, weil $fC = CF$, ſo iſt auch $HQ = QF$. Es iſt aber $fM - FM = sS$ und $\frac{1}{2}fM$ (oder $\frac{1}{2}HM$) $- \frac{1}{2}FM = CS$; das iſt $\frac{1}{2}HM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}HQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM =$

$\frac{1}{2}FQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}QM + \frac{1}{2}MF + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = QM = CS$. Weil aber EQ zu fH parallel iſt, und $Mf = MH$, ſo iſt auch $QM = EM$.

24. §.

Wenn man die vorige Conſtruction der zwölften und dreyzehenden Figur beybehält, (23. §.) ſo kann man gleichfalls zeigen, daß $MN \times MR$ dem CL^2 gleiche. Denn ſowohl in der Ellipſe als Hyperbole iſt $CV \times CX = CL^2$. Ziehet man nun aus dem Mittelpuncte C zur Tangente XF eine ſenkrechte Linie CI, ſo ſind die Dreyecke CIX und MPN einander ähnlich. Deßwegen bekömmt man $CI : CX = MP : MN$. Es iſt aber $CI = MR$, und $MP = CV$: wenn man alſo dieſe dafür anſetzet, ſo wird $MR : CX = CV : MN$, und alſo $MR \times MN = CX \times CV = CL^2$.

25. §.

Zweyter Lehnſatz.

Wenn aus dem Interſectionspuncte N, wo die Normallinie und die Axe des Kögelſchnittes zuſammen ſtoſſen, die zu FM ſenkrechte Linie NB gezogen wird, ſo iſt MB dem halben Parameter gleich. Denn in der Ellipſe (12. Fig.) ſind die Dreyecke NBM, EMR, welche bey B und R einen rechten Winkel haben, wegen den bey M gemeinſchaftlichen Winkel einander ähnlich.

---

*) Es verſtehet ſich von ſelbſt, daß die Parallele zur Tangente, welche durch den Mittelpunct gezogen iſt, ein conjugirter Durchmeſſer derjenigen Linie ſey, welche man durch den Berührungspunct gezogen hat.

lich. Deßwegen iſt $MB : MN = MR : ME$ oder CS (23. §.); folglich $CS \times MB = MN \times MR = CL^2$ (25. §.). Wenn man nun den halben Parameter, als die zu CS und CL beſtändige dritte Proportionallinie, L heißt, ſo iſt auch $CS \times L = CL^2$, hiemit $CS \times MB = CS \times L$ oder $MB = L$.

In der Hyperbole (13. Fig.) ſind ſich die Dreyecke MRQ und MBN wegen gleichen Winkeln bey der Spitze M, und den rechten Winkeln bey R und B ähnlich. Deßwegen iſt $RM : MQ$ (oder CS 23. §.) $= MB : MN$, wo wir denn wiederum bekommen $RM \times MN = CL^2$ (25. §.) $= BM \times CS$; und, wenn der halbe Parameter L genennet wird, ſo wird wie vorher $L = BM$.

Für die Parabole (14. Fig.) iſt dieſes wohl ſehr leicht zu beweiſen. Denn daſelbſt iſt allzeit $FM = FN$: und, weil bey F der gemeinſchaftliche Winkel iſt, wie auch bey P und B rechte Winkeln anzutreffen, ſo ſind auch die Dreyecke FMP und FNB einander ähnlich und gleich; folglich $FP = FB$. Deßwegen, wenn man gleiche Größen von gleichen wegnimmt, ſo verbleibt $PN = BM$. Es iſt aber aus der Lehre von Kögelſchnitten ſehr bekannt, daß in einer Parabole PN oder die Subnormal dem halben Parameter gleiche: ſo iſt denn auch demſelben die Linie BM gleich.

26. §.

Aus dem geſagten kann man wohl ganz leicht eine Methode finden, den halben Durchmeſſer des küſſenden Zirkels zu beſtimmen, wenn die Normale und der Brennpunct in einem Kegelſchnitte gegeben ſind; oder auch die Normale zu finden, wenn man den halben Durchmeſſer des küſſenden Zirkels, und die Sehne, welche durch den Brennpunct geht, vorher weis. Denn die Normale fällt nothwendig auf den halben Durchmeſſer des küſſenden Winkels, weil alle beyde in dem nämlichen Punct M (Fig. XV.) zur Tangente MQ ſenkrechte Linien ſind, und der halbe Durchmeſſer des küſſenden Zirkels in allen Kegelſchnitten um den Cubus der Normallinie, welcher mit dem Quadrate des halben Parameters dividirt wird, gleich iſt. Es ſey alſo nach dem gegebenen Beweiſe MB der halbe Parameter (§. 24.), ſo wird auch $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$: hiemit $MB^2 : MN^2 = MN : MC$; oder, wenn man aus N zu MC eine ſenkrechte Linie aufrichtet, welche in L der geraden Linie FM entgegen kömmt, ſo iſt die Analogie $BM : MN = MN : ML$, und alſo auch $MB^2 : MN^2 = MB : ML$ oder $MB : ML = MN : MC$. Weil nun bey B und deßwegen auch bey L ein rechter Winkel iſt, ſo iſt es nicht möglich, daß MC ein halber Durchmeſſer des Zirkels ſey, außer es iſt $ML = \frac{1}{2} MV$. Man findet alſo aus dieſer Proportion und Conſtruction ſowohl den halben Durchmeſſer des küſſenden Winkels, als auch die halbe Sehne ML, welche durch den Brennpunct F gezogen iſt.

27. §.

Im Gegentheil giebt man den halben Durchmeſſer des küſſenden Zirkels, und den Brennpunct des Kegelſchnittes ſo findet man die Normale MN. Denn, wenn MC und der Punct F bekannt ſind, ſo weis man auch das MV und ML. Es ſind aber die Dreyecke MBN und MLC einander ähnlich: deßwegen, weil $BM^2 : MN^2 = MN : MC$, ſo iſt auch $ML^2 : MC^2 = MN : MC$; und alſo $MN = \frac{ML^2}{MC}$. Man darf jetzt nichts anders thun, als daß man aus L zu MC eine ſenkrechte Linie LN herabfallen läßt, welche ſodann die geſuchte Normallinie MN beſtimmen wird.

28. §.

Dritter Lehnſatz.

Wenn man eine Sehne MV (Fig. XV. XVI. XVII. XVIII.) in D alſo theilet, daß $MD = \frac{1}{4} MV = \frac{1}{2} ML$, hernach das D mit N vereiniget, ſo wird die Linie DN zu Mf, welche durch den andern Brennpunct gezogen iſt, parallele ſeyn. Denn den Winkel FMf ſchneidet die Normale MN in jedem Kegelſchnitte in zween gleiche Theile, wenn nämlich in der Hyperbole auch der äußere Winkel oder $DM\phi$ (Fig. XVII.) in Betracht gezogen wird. Es iſt alſo $DMN = NMf$, oder in der Hyperbole $= NM\phi$. Hernach, weil LN zu MN ſenkrecht iſt, und $LD = DM$, ſo iſt auch $DN = DM$ und $DMN = DMN = NMf$; das iſt, DN, Mf (oder $M\phi$) ſind gleichlaufende Linien.

29. §.

Wir bekommen alſo in einer Ellipſe (Fig. XV. XVI.) die Analogie $FD : DN = FM : Mf$; das iſt, $FD : DM = FM : Mf$; und, wenn wir zuſammen ſetzen, ſo iſt $FD : FD + DM\ (= FM) = FM : FM + Mf\ (= sS)$. Deßwegen, im Falle wir das FM (Fig. XVI.) weiter hinausziehen, oder verlängern, daß nämlich ſey $FD : FM = FM : FE$, und, wenn man hernach aus E die ſenkrechte Linie EQ, welche auf die Tangente herabfällt, verlängeret, bis nämlich $EQ = Qf$, ſo wird f der andere Brennpunct, durch welchen die verlängerte fN gehet, denn aus eben der Urſache wird $ME = Mf$ und $FE = Ss$.

30. §.

In einer Hyperbole (Fig. XVII.) liegt F, wenn man ſelbes auf das M beziehet, ober den D. Doch bekömmt man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DFN und FMf die Analogie $DF : DN$ (oder DM) $= FM : Mf$: und abgetheilter iſt $DF : DM - DF\ (FM) = FM : Mf - FM\ (Ss)$. Wenn man alſo in der geraden Linie MV auf der Seite, wo das D iſt, das FE nimmt, daß nämlich $DF : FM = FM : FE$; wenn man hernach die aus E in MQ herabgelaſſene ſenkrechte Linie EQ hinausziehet, bis $EQ = Qf$, ſo bekömmt man das f, und alſo die transverſe Axe $FE = Ss$.

31. §.

In der Parabole iſt $Mf = \infty$. Wenn man nun annimmt, daß $FD : FM = FM : \infty$ (Fig. XVIII.), ſo folgt nothwendig, daß ſich FD verliehren muß, weil $\infty : FM = FM : o$: deßwegen fließen die zween Puncte F und D zuſammen; doch kann man den Scheitelpunct einer Parabole leicht beſtimmen, wenn man aus M eine ſenkrechte Linie MP auf die hinaus gezogene Linie FN herabfallen läßt, und die Subtangens PT in S in zween Theile ſchneidet.

32. §.

Hier läßt ſich zugleich eine allgemeine Folgerung machen, daß, wenn F unter dem D liegt, der Kegelſchnitt eine Elipſe ſey (Fig. XV. XVI.); fließt aber F mit D zuſammen, ſo iſt ſelber eine Parabole (Fig. XVIII.). Liegt endlich das F ober dem D, ſo iſt der Kegelſchnitt eine Hyperbole (Fig. XVII.). Denn im erſten Falle iſt $MFN < MDN$; folglich müſſen FN und Mf zuſammenſtoſſen, und zwar auf der Seite N, welche ſich gegen die Tangente MQ wendet. Im zweyten Falle iſt es klar, daß ſie nirgends einander begegnen. Aber im dritten Falle (Fig. VII.) iſt MFN > MDN, hiemit ſtoſſen die zwo Linien NF und M*f* auf der Seite F zuſammen, welche die Gegenſeite der Tangente MQ iſt. Nun dann im erſten Falle ſind die Brennpuncte auf der nämlichen Seite der Tangente, welches ſich bey einer Ellipſe äußert. Im zweyten Falle hat der eine von den Brennpuncten einen unendlich entfernten Abſtand, welches der Parabole eigen iſt. In dem dritten Falle ſind die Brennpuncte auf den verſchiedenen Theilen der Tangente anzutreffen, welches aber nur von der Hyperbole kann verſtanden werden.

33. §.

Dieſes alles, was wir vom 23. §. bis auf den gegenwärtigen Abſatz geſagt haben, mußten wir voraus ſetzen, um die nachfolgenden Sätze von der Theorie der Centralkräfte ächt aufgeklärt einzuſehen, und gründlich zu beweiſen. Es gehören aber ſelbe meiſtens zur richtigen Beſtimmung der Laufbahne eines Planeten; wie auch die Geſchwindigkeit eines Körpers zu beſtimmen, mit welcher derſelbe nach der gegebenen Richtung muß hingeriſſen werden, damit er um den gegebenen Mittelpunct der Kräfte einen Kegelſchnitt beſchreibe, welchen man nämlich aus dem halben Durchmeſſer des küſſenden Winkels und aus der Sehne, welche man durch den Mittelpunct der Kräfte ziehet, finden kann; oder auch daß man die Lage und die Größe des zu beſchreibenden Kegelſchnittes beſtimmen kann, wenn die Geſchwindigkeit und die Richtung eines durch die Bewegung hingeriſſenen Körpers gegeben ſind. Man ſetzt aber hier allzeit im voraus als bekannt, daß die Centralkräfte in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältniſſe, Ratio duplicata reciproca, der Abſtände wirken.

34. §.

Es ſey (XV. Fig.) ein küſſender Zirkel, welcher ſeinen Durchſchnitt in M hat. Der Mittelpunct der Kräfte ſey F; die Richtung der mitgetheilten Kraft ſey MP. Endlich die Sehne MV ſolle durch F gehen. Setze man nun, daß der Körper in M ſchon jene Geſchwindigkeit inne hätte, welche er doch erſt bekommen würde, wenn er durch MD herab fiele. Nun wird ſelber zu der nämlichen Zeit, wo er mit einer einförmigen Kraft die Linie MD beſchreibet, das zweyfache davon, nämlich ML beſchreiben, im Falle ſeine Bewegung eine einförmig zunehmende oder beſchleunigende wäre. Gleichfalls, da der Körper, im Falle er durch die nämliche Geſchwindigkeit dahin geriſſen würde, mit einer gleichförmigen Bewegung die Linie MP beſchreibt, ſo würde er mit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung die Linie PR durchlaufen; es haben aber die Räume, welche bey der Wirkung der nämlichen Anziehungskraft durch eine einförmig zunehmende Kraft durchlaufen werden, das nämliche Verhältniß unter ſich, welches die Quadrate der Zeiten beobachten; und dieſe ſind wie die Quadraten der Räume, welche zu der nämlichen Zeit mit einer einförmigen und durch den Fall überkommenen Geſchwindigkeit beſchrieben würden; wie dieſes alles aus der Lehre der Mechanik bekannt iſt. Es iſt alſo $PR : MD = MP^2 : ML^2$. Und, wenn man das erſte Verhältniß mit PA, welche zu MV parallel iſt, multiplicirt, ſo iſt $PR \times PA : MD \times PA = MP^2 : ML^2$. Es iſt aber bekannt, daß in einem Zirkel $PR \times PA = MP^2$: ſo iſt denn auch $MD \times PA = ML^2$. Deßwegen iſt $PA : ML = ML : MD$. Wenn nun die Linie PA der andern Linie MV unendlich nahe kömmt; oder wenn die Puncte M R zuſammenfließen, ſo iſt $PA = MV$; deßwegen auch $MV : ML = ML : MD$. Nehme man nun, daß $ML = 2MD$, ſo iſt $MV = 2ML$, mithin

hin $MD = \frac{1}{4} MV$. Das iſt: die Sehne eines küſſenden Zirkels in einem Kögelſchnitte, wenn ſie durch den Brennpunct gehet, in welchem der Mittelpunct der im umgekehrten gezweyfältigten Verhältniſſe wirkenden Kräfte iſt; eine ſolche Sehne iſt die vierfache Höhe, durch welche ein Körper fallen muß mit einer unveränderlichen Anziehungskraft, welche er in einem ſolchen Abſtande hat, daß er jene Geſchwindigkeit überkomme, mit welcher er nach der gegebenen Richtung ſoll hingeriſſen werden, um den gegebenen Kögelſchnitt zu beſchreiben.

35. §.

Eben dieſen Hauptſatz von der Theorie der Centralkraft kann man aus des Newtons oder de la Cailles Grundſätzen (welche wir indeſſen borgen wollen, um nicht gar zu ſehr weitläuftig zu werden) auf folgende Art beweiſen. Man nehme MD als die Höhe an, durch welche, wenn ein Körper fällt, in M die Geſchwindigkeit erhalten wird. So iſt nun vermöge der aſtronomiſchen Grundſätze *) die Geſchwindigkeit in M wie $\frac{\sqrt{2MB}}{FT}$ (denn, wenn man die Linie NB zur FM perpendicular ziehet, ſo iſt MP der halbe Parameter von der Hauptaxe, wie wir ſchon oben 24. §. bewieſen haben); es iſt aber auch aus den mechaniſchen Grundſätzen **) $c = 2\sqrt{s\,v}$, oder auch $2\frac{\sqrt{MD}}{FM}$, und hiemit $\frac{\sqrt{2MB}}{FT} = \frac{2\sqrt{MD}}{FM}$, oder $\frac{2MB}{FT^2} = \frac{4MD}{FM^2}$. Deßwegen iſt $FM^2 : FT^2 = 2MD : MB$; und wenn man aus T zu FM eine ſenkrechte Linie TX herabfallen läßt, ſo bekömmt man wegen

---

*) Siehe Newton. Lib. I. Princ. Propoſ. XVI. Theorem. VIII. Item de la Caille Leçons Aſtron. §. 166.

**) Siehe des de la Caille Mechaniq. §. 113.

gen $FM^2 : FT^2 = FM : FX$ die Proportion $FM : FX = 2MD : MB$: ziehet man weiters die Linie NL zu MT parallel, ſo iſt gleichfalls $ML : MB = FM : FX$; denn die Dreyecke FTM, FTX, MNL, MNB ſind einander ähnlich. Deßwegen wird auch $MB : ML = MB : 2MD$; das iſt, $2MD = ML$. Es iſt aber aus der Lehre von den Kögelſchnitten bekannt, daß $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$; und alſo iſt MLC ein rechter Winkel (26. §.) und $ML = \frac{1}{2}MV$; hiemit $MD = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}MV$.

36. §.

Wir haben ſchon oben 32. §. geſagt, daß, wenn D ober dem F iſt, ſo iſt der Durchſchnitt des gegebenen küſſenden Winkels eine Ellipſe; wenn aber D mit F zuſammenfließt, iſt ſelber eine Parabole; und endlich eine Hyperbole, wenn D unter dem F liegt. Nun iſt es richtig, daß, wenn eine Ellipſe beſchrieben wird, die Projectionsgeſchwindigkeit minder ſeyn müſſe, als die Geſchwindigkeit, welche der Körper überkommen würde, wenn er aus M bis in F fiele. Eben ſo gewiß iſt es, daß ſelbe in Beſchreibung einer Parabole gleich ſeyn müſſe. Endlich zur Beſchreibung einer Hyperbole iſt nöthig, daß der Körper mit einer größern Geſchwindigkeit muß hingeriſſen werden, als diejenige iſt, welche man durch eine in M unveränderliche Anziehungskraft überkommen würde, wenn der Körper aus M in F fällt.

37. §.

Wenn wir im voraus ſetzen, daß der Mittelpunct der Kräfte einen unendlich groſſen Abſtand habe, ſo bekömmt man eine Parabole (XIX. Fig). Denn alsdenn wird die Linie TN zu

UM parallel. Ferner in der oben bewieſenen Analogie $DF : FM = FM : FE$ (30. §.) wird $FM - FD$ (oder DM) : $FE - FM$ (ME) $= DF : FM$. Weil nun nach dem geſetzten Heiſcheſatz FD und FM unendlich groß ſind, ſo ſind ſie einander gleich, wie auch $DM = ME$; deßwegen, wenn man aus E eine ſenkrechte Linie EQ ziehet, und das Q*f* demſelben gleich nimmt, ſo bekömmt man den Brennpunct *f*; hernach ziehe man die Ordinate MP; die Subtangens PT, und beſtimme den Scheitelpunct S, ſo wird man EM als den vierten Theil des zum Durchmeſſer MV gehörigen Parameters überkommen.

38. §.

Wenn M der Scheitelpunct von der Hauptaxe des Kögelſchnittes iſt, (XV. XVI. XVII. XVIII. Fig.) ſo gehet der Durchmeſſer des küſſenden Zirkels durch den Mittelpunct der Kräfte, und die Sehne MV wird mit dem Diameter zuſammen fließen; deßwegen auch die Puncte L, N, C zuſammen kommen. Wir wiſſen aber, daß die Normale im Scheitelpuncte einem halben Parameter gleich ſey (19. §.), und hiemit verwandelt ſich die Formel $\frac{MN^3}{MB^2}$, welche die Gleichung des halben Durchmeſſers vom küſſenden Zirkel iſt (26. §.), in $\frac{MB^3}{MB^2} = MB$, welches einem halben Parameter gleich iſt. Es iſt alſo in dieſem Falle MQ die Normale zu MF (Fig. XX.). Wenn nun $MD < DF$ in der Analogie $FD : FM = FM : FE$, ſo wird $FM < 2FD$, hiemit auch $FE < 2FM$. Deßwegen läßt man die zu MQ in M ſenkrechte Linie EM herabfallen, und ziehet man ſie hinaus bis in *f*, daß alſo $Mf = ME$, ſo wird *f* innerhalb M und F fallen. Es iſt alſo in dieſem Falle M der oberſte Apſidenpunct von einer zu beſchreibenden Ellipſe. Und, wenn man die vorige Proportion zertheilet, ſo wird F E — F M (M E); F M = F M — F D (M D): F D, hiemit M E: M D = F M: F D und F M > F D, folglich auch E M > M D: deßwegen wird f zwiſchen den D und F hineinfallen.

39. §.

Wenn M D > F D (Fig. XXI.), ſo wird F M > 2 F D, und F E > 2 M F; deßwegen, wenn man den Punct f auf das M beziehet, ſo wird ſelber über das F hinausfallen, und M wird alſo der unterſte Apſidenpunct in einer beſchriebenen Ellipſe ſeyn.

40. §.

Wenn M D = D F (Fig. XXII.), ſo wird F M = 2 F D, und F E = 2 F M, wo dann f in F fallen wird; das iſt, es wird ein Zirkel beſchrieben werden. Deßwegen iſt klar, daß das Hugeniſche Theorem nur als ein ſonderlicher Fall in Betrachtung des geſagten anzuſehen ſey, denn Hugenius beweiſet, daß die Geſchwindigkeit in einem Zirkel derjenigen Geſchwindigkeit gleich kömmt, welche überkommen wird, wenn der Körper den vierten Theil des Durchmeſſers herabfällt.

41. §.

Wenn M D > M F (Fig. XXIII.), und F E auf der nämlichen Seite iſt, wo D liegt, ſo wird E M allzeit größer ſeyn als F M: deßwegen fällt f allzeit außer die Tangente, und der Kegelſchnitt wird eine Hyperbole ſeyn. Im Gegentheil iſt M D = M F (Fig. XXIV.), oder F D = 0, ſo wird M E = ∞, und der zu beſchreibende Kegelſchnitt eine Parabole ſeyn.

42. §.

Wenn MD unendlich groß iſt, (Fig. XVII. und XXIII.) das iſt, wenn ein Körper mit einer unendlich groſſen Geſchwindigkeit hingeriſſen wird, ſo verwandelt ſich die Hyperbole in eine gerade Linie MQ; denn auf ſolche Weiſe wird $FD = \infty$, und die Analogie $FD : FM = FM : FE$ ſich in $\infty : FM = FM : o$ verändern, wo denn, weil die Transverſe oder Zwergaxe ſich verliehret, die Hyperbole eine unendliche Breite überkömmt; das iſt, ſelbe wird zu einer geraden Linie.

43. §.

Wenn MQ oder die Richtung der Projection mit FM (Fig. XXV.) in einer geraden Linie liegt, und der Körper mit derjenigen Geſchwindigkeit hingeriſſen wird, welche er überkömmt, wenn ſelber durch MD fällt; ſo werden erſtens MC und LC parallele; oder der halbe Durchmeſſer des küſſenden Zirkels unendlich groß; hernach fällt LM in M, oder die Normale MN verliehret ſich; endlich wird die krumme Linie ſich in eine gerade verändern, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gehet. Aus welchem ſich dann weiters folgern läßt, daß, wenn ein Körper eine Ellipſe SMs (Fig. XII.) beſchreibet, wo der Hauptparameter $2MB$ ſey, ſo wird deſſen Geſchwindigkeit in s als dem unterſten Apſidenpuncte zur Geſchwindigkeit in S, als dem oberſten Apſidenpuncte, eben das Verhältniß beobachten, welches iſt zwiſchen $\frac{\sqrt{2BM}}{Fs}$ und $\frac{\sqrt{2BM}}{FS}$ oder $FS\sqrt{2BM} : Fs\sqrt{2BM}$.

44. §.

Wenn in den meiſten Figuren, auf welche wir uns bisher bezogen haben, das MD einem o gleich genommen wird, ſo bekömmt

kömmt die Analogie $FD : FM = FM : FE$ alle drey Glieder einander gleich; deßwegen $ME = o$ und f mit M zuſammenfließt. Hiemit, wenn ein Körper mit einer unendlich kleinen Geſchwindigkeit hingeriſſen wird, ſo wird er eine unendlich enge Ellipſe, das iſt, eine gerade Linie beſchreiben, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gezogen wird.

45. §.

Aus dem geſagten läßt ſich ferner beweiſen, daß die Geſchwindigkeit eines Körpers, welcher einen Kegelſchnitt beſchreibet, und wo der Mittelpunct der Kräfte in dem Brennpuncte geſetzet wird, in einem jeden Puncte des Umkreiſes das gerade Quadratwurzlichte Verhältniß (Ratio directa ſubduplicata) des Hauptparameters, und das verkehrte einfache Verhältniß des Perpendikels, welches man aus dem Mittelpuncte der Kräfte herabläßt, beybehält. Denn aus den Formeln der Mechanik, wo man gemeiniglich die Geſchwindigkeit durch c, die Zunehmungskraft durch v, und den Raum durch s ausdrücket, iſt bekannt, daß $c = 2\sqrt{sv}$; wir nehmen aber in dieſem Zuſatze an, daß $v = \frac{1}{FM^2}$; und $s = \frac{1}{4} MV$ (Fig. XV.) Deßwegen iſt nothwendig $c = \frac{2 \times 1}{FM} \times \frac{1}{2}\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{MV}}{FM}$. Es iſt aber $BM : MN = MN : ML = \frac{MN^2}{BM}$; und $2\,ML = MV = \frac{2\,MN^2}{BM}$. Wie auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke FTM und MBN bekömmt man $FT : FM = BM : MN = \frac{MF.\,BM}{FT}$; folglich $\frac{2\,MN^2}{BM} =$

$\frac{2 FM^2 : BM^2}{FT^2 . BM} = \frac{2 FM^2 \times BM}{FT^2}$; und $\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{2 MN^2}}{\sqrt{BM}} = \frac{FM \times \sqrt{2 BM}}{FT}$, welchen Werth, wenn man in $\frac{\sqrt{MV}}{FM}$ anſetzet, ſo wird $\frac{FM \times \sqrt{2 BM}}{FT \times FM} = \frac{\sqrt{2 BM}}{FT}$. Es iſt aber B M aus dem obengeſagten (§. 25.) dem halben Parameter der Hauptaxe gleich: deßwegen iſt die Geſchwindigkeit eines Körpers, welcher ꝛc. *

*) Hier könnten wir noch ſehr vieles aus der Theorie der Centralkräfte beyrücken, welches in der Rückſicht auf die Aſtronomie ungemein nützlich und vortheilhaft iſt; doch wird das meiſte, was wir davon ſagen können, in des de la Caille und de la Lande Aſtronomie auf die vollkommenſte Weiſe angeführet. Deßwegen wollen wir hier nur noch was weniges herſetzen, wovon man in der Aſtronomie einen nützlichen Gebrauch machen kann.

46. §.

Erſte Aufgabe.

Man ſoll das Verhältniß der Centralkräfte finden, in dem Falle, daß ein Körper einen Zirkel M O A beſchreibe (Fig. XV.), und der Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct des Zirkels in F geſetzt ſey. Die allgemeine Auflöſungsformel iſt für dieſe Aufgabe $f = \frac{F p}{S T^2 . P F^2}$, (*) oder, wenn wir dieſe Formel auf die XV. Figur anwenden wollen, und alſo ſtatt des Theils der Tangente einen unendlich kleinen Bogen annehmen, ſo wird $f = \frac{PR}{FT^2 \times MR^2} = \frac{MY}{FT^2 \times MR^2}$. Nun iſt $ME : MR = MR : MO$, hiemit $ME = \frac{MR^2}{MO}$. Weiters iſt $ME : MY = ML : MC$

---

*) Siehe De la Caille Leçons Aſtron. §. 160.

$MC = MV : MO$; das iſt: $\frac{MR^2}{MO} : MY = MV : MO$: hiemit $MY = \frac{MO \times MR^2}{MO \times MV} = \frac{MR^2}{MV}$. Wenn man alſo dieſen Werth in der Formel anſetzt, ſo wird $f = \frac{MR^2}{FT^2 \times MR^2 \times MV} = \frac{1}{FT^2 . MV}$. Hernach iſt $CM : LM = MO : MV = FM : FT$, hiemit $FT^2 = \frac{MV^2 . FM^2}{MO^2}$, wo dann endlich $f = \frac{MO^2}{FM^2 \times MV^3}$, und, wenn man die unveränderliche Größe MO wegläßt, ſo iſt $f = \frac{1}{FM^2 \times MV^3}$.

47. §.

Es kann alſo durch die allgemeine Anziehungskraft kein Zirkel beſchrieben werden, wenn nicht der Mittelpunct der Kräfte eben der Mittelpunct des Zirkels iſt. Deßwegen können die Planeten um die Sonne keine Zirkelbögen beſchreiben, wenn die Sonne außer den Mittelpunct geſetzt iſt.

48. §.

Zwote Aufgabe.

Das Verhältniß der Centralkraft zu finden, wenn der Körper eine Ellipſe beſchreibt, und der Mittelpunct der Ellipſe mit dem Mittelpuncte der Kräfte überein kömmt, oder eben derſelbe iſt. Die

Formel für dieſe Aufgabe iſt $f = \frac{SP}{ST^3 \times {}^2 PG}$ *) wo ST (Fig. XXVI.) die ſenkrechte Linie iſt, welche aus dem Mittelpuncte der Kräfte zur Tangente gezogen wird. 2 PY iſt der Durchmeſſer des küſſenden Winkels, und *SP* der Radius Vector. Weil aber nach dieſem Satze $2\,PY = \frac{2\,SD^2}{ST}$ ſo wird $f = \frac{SP \times ST}{ST^3 \times 2\,SD^2} = \frac{SP}{ST^2 \times 2\,SD^2}$. Es iſt aber $SD^2 = \frac{AS^2 \times SB^2}{ST^2}$; deßwegen, wenn man dafür den Werth anſetzet, ſo iſt $f = \frac{SP \times ST^2}{2\,ST^2 \times AS^2 \times BS^2} = \frac{SP}{2\,AS^2 \times BS^2}$, und wenn man endlich die unveränderlichen Größen wegläßt, ſo wird $f = SP$.

49. §.

Dritte Aufgabe.

Das Verhältniß der periodiſchen Zeiten zu finden, wenn ein Körper durch die Centralkraft, welche nach dem Mittelpunct der Ellipſe gerichtet iſt, eine Ellipſe beſchreibet. Man ſoll aber dieſes Verhältniß ſowohl für die Ellipſe, als für einen Zirkel beſtimmen, welcher über die größere Axe der Ellipſe iſt beſchrieben worden. Es ſollen alſo die Zeiten, in welchen der Zirkel und die Ellipſe beſchrieben worden, T und *t* heißen. Die Größe des Raumes von dem Zirkel ſey = A; von der Ellipſe aber = *a*. Setze man nun, daß der Körper aus A (Fig. XXVII.), wo die Centralkraft in einer Ellipſe und in dem Zirkel die nämliche iſt, hingeriſſen werde, ſo werden die Zeiträume AMS und ANS ſeyn, da indeſſen in der Zeit, wo der Körper durch AP fällt, in der

---

*) Siehe De la Caille Leçons Aſtron. §. 162.

Ellipſe AM und in dem Zirkel AN beſchrieben würden. Nehme man nun den Sector $ANS = S$, und den Sector $AMS = s$, ſo iſt aus den mechaniſchen Grundſätzen $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$ (18. §.). Es iſt aber $A : a = SD : SY$ und $S : s = SD : SY$; deßwegen, wenn man dieſen Werth dafür anſetzet, ſo iſt $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SY}{SY} = 1 : 1$, folglich $T = t$.

50. §.

Wenn man nun das Geſagte genugſam einſieht, ſo iſt es klar, daß der geometriſche Ort aller Brennpuncte f in den Kegelſchnitten, welche durch eine jede Projectionsgeſchwindigkeit nach einer gewiſſen Richtung QM um den gegebenen Brennpunct F mögen beſchrieben werden (Fig. XVII.) eine unendliche gerade Linie $fM\phi$ ſey, alſo zwar, daß davon der unbeſtimmte Theil $M\phi$ für die Brennpuncte der Ellipſen gehöre, welche ſich in eine Parabole verwandeln, ſobald ϕ unendlich von M abweicht: hingegen wird ϕ dem M unendlich nahe kommen, ſo ziehen ſich die Ellipſen in eine gerade Linie zuſammen. Weiters gehört der andere Theil Mf für die Hyperbolen, alſo zwar, daß, wenn ſelbe um den Brennpunct F beſchrieben werden, ſie allzeit QM in M berühren, ſo oft $Mf > MF$. Wenn aber $FM = Mf$, ſo verwandeln ſich beyde Hyperbolen in eine gerade Linie QM. Iſt endlich $FM > fM$, ſo berühren ſie die gerade Linie QM, welche den Brennpunct f haben. Wenn alſo die Anziehungskraft nach F abzielet, ſo iſt es nicht möglich, daß eine Hyperbole um den Brennpunct f beſchrieben werde, denn, weil in dieſem Falle allzeit $EM > FM$ und $EM = fM$, ſo iſt auch $fM > FM$. Nimmt man aber im Gegentheil die vom Punct F zurück prellende Kraft, welche in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältniſſe der Abſtände wirket, ſo werden zwar Hyperbolen, von welchen der Ort ihrer Brennpuncte f auf der andern Seite der Tangente QM in Mf iſt, beſchrieben werden, aber nur ſo lange, bis Mf dem MF gleich werde. Alſo wollen wir ſetzen, daß der Körper M (Fig XXVIII.) von F im beſagten Verhältniſſe zurück geprellet werde, ſo wird man MD über QM hinaus ziehen müſſen, durch welche Linie, wenn der Körper mit einer unveränderlichen zurückprellenden Kraft in M zurück kehrte, ſelber diejenige Geſchwindigkeit überkommen würde, mit welcher er aus M hingeriſſen wird. Man mache nun die Analogie FD : FM = FM : FE; läßt man nun die Perpendiculare EQ zu QM herabfallen, und nimmt man das EQ = Qf, ſo überkömmt man den Brennpunct der Hyperbole AMO, welche um den Brennpunct f beſchrieben wird. Denn, weil MD dem vierten Theile der Sehne des küſſenden Zirkels gleich iſt, und, indem ſelbe durch den Mittelpunct der zurück prellenden Kraft F gezogen iſt, ſie über QM zu ſtehen kömmt, ſo iſt der ganze Zirkel über QM hinaus. Deßwegen, wenn man, wie vorher, das DL dem MD gleich macht, und zu CM die Perpendiculare LN (es iſt aber CM zu QM gleichfalls eine ſenkrechte Linie) ziehet, ſo wird MN die Normale der Hyperbole. Ferner bekömmt man in der Analogie FD : FM = FM : FE durch die Zertheilung FD — FM (DM) : FM — FE (ME) = FD : FM und wegen des rechten Winkels bey N iſt ND = DM; wegen der zween rechten aber bey Q iſt fM = ME; deßwegen iſt auch ND : fM = FD : FM. Wenn man alſo Ff hinaus ziehet, ſo gehet ſelbe durch N.

51. §.

51. §.

Man kann ſich einen dreyfachen Fall vorbilden, in welchem eine Hyperbole, welche durch eine zurückprellende Kraft beſchrieben wird, ſich in eine gerade Linie verwandelt. Der erſte Fall iſt, wenn man die Projectionsgeſchwindigkeit als unendlich groß oder $= \infty$ annimmt. Der zweyte Fall iſt, wenn man eben dieſe Geſchwindigkeit oder MD als $= 0$ anſetzet; und in dieſem Fall iſt $FM = fF = EF$; das iſt, der Abſtand des Brennpuncts von dem Scheitelpunct verliehrt ſich ganz und gar, und die Hyperbole, indem ſie unendlich zuſammen gedrückt wird, verwandelt ſich in eine gerade Linie. Wenn man endlich für den dritten Fall ſetzet, daß MQ mit FM in einer geraden Linie liegt, ſo geſchieht das nämliche. Ferner läßt ſich folgern, daß, wenn F zu einem unendlich entfernten Abſtande gelangt, oder wenn die zurückprellende Kraft nach den parallelen Richtungen wirket, ſo wird die Hyperbole, welche man um den Brennpunct f beſchreibet, zu einer Parabole, welche nach der Methode, ſo wie oben 37. §. iſt bewieſen worden, kann beſtimmet werden; dieſes einzige muß man beobachten, daß man F auf die Seite des E ſetze, und die in der XIX. und XXIV. Figur gemachte Entwerfung umzuwenden habe.

52. §.

Wenn ein Körper um F (Fig. XII.) einen Zirkel, deſſen Radius Fs wäre, beſchreiben ſollte, ſo würde ſeine Geſchwindigkeit durch $2\sqrt{vs}$ müſſen ausgedrücket werden, wo denn v die Centralkraft, s aber den Raum, durch welchen ein Körper fallen würde, anzeigete, oder man würde dieſelbe auch durch das Verhältniß zu $\frac{2 \times 1 \times \sqrt{\frac{1}{2}Fs}}{Fs} = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}Fs}}{Fs} = \frac{\sqrt{2Fs}}{Fs}$ ausdrücken können

(43. §.). Eben auf dieſe Weiſe, wenn ein Körper einen Zirkel beſchreiben ſollte, deſſen Mittelpunct F und der halbe Durchmeſſer FS wäre, ſo würde eine Geſchwindigkeit erfordert, welche wäre wie $\frac{\sqrt{2Fs}}{FS}$; deßwegen würde die Geſchwindigkeit eines ſolchen Körpers, welcher nämlich einen Zirkel von einem halben Durchmeſſer FS beſchriebe, durch das Verhältniß $FS\sqrt{2Fs} : Fs\sqrt{2FS}$ müſſen ausgedrücket werden. Es iſt aber klar, daß $Fs < BM$ und $FS > BM$; deßwegen iſt auch $FS\sqrt{2BM} > FS\sqrt{2Fs}$ und $Fs\sqrt{2BM} < Fs\sqrt{2FS}$; hiemit iſt $FS\sqrt{2BM}$ die Geſchwindigkeit in dem unteren; $Fs\sqrt{2BM}$ aber die Geſchwindigkeit in dem oberſten Apſidenpuncte von einer Ellipſe. Wenn alſo ein Körper in einer Ellipſe zu dem unterſten Apſidenpuncte kömmt, ſo hat er eine größere Geſchwindigkeit, als daß er mit ſolcher einen Zirkel, deſſen halber Durchmeſſer der Abſtand dieſes Apſidenpuncts von dem Mittelpunct der Kräfte wäre, beſchreiben könnte. Iſt er aber im oberſten Apſidenpunct, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit minder, als ſie erfordert wird einen Zirkel zu beſchreiben, wo der halbe Durchmeſſer dem Abſtande des oberſten Apſidenpuncts von dem Mittelpuncte der Kräfte gleich kömmt. Uebrigens verſtehet man leicht, daß die Geſchwindigkeiten der Körper, welche für ihren Umkreis concentriſche Zirkeln hätten, ein umgekehrtes quadratwurzlichtes Verhältniß ihrer halben Durchmeſſer beobachten müßten; denn, wenn die halben Durchmeſſer FS und Fs ſind, ſo ſind aus dem Geſagten die Geſchwindigkeiten wie $Fs\sqrt{2FS} : FS\sqrt{2Fs}$; oder, wenn man dieſe zwey Glieder mit $\sqrt{2Fs \times FS}$ dividirt, ſo verhalten ſie ſich wie $\sqrt{Fs} : \sqrt{FS}$.

53. §.

Wir haben ſchon geſagt, daß LNM (Fig. XV.) ein rechter Winkel ſey (§. 26.): Es gehet alſo der Zirkel, welchen man über den Diameter LM aus dem Mittelpuncte D beſchreibet, durch N. Deßwegen wird $DN = DM$, und $DNM = DMN = MNf$. Folglich ſind DN und Mf einander parallel, und $FD : DN$ (oder DM) $= FM : Mf$; wiederum $FD : FD + DM$ (FM) $= FM : FM + Mf$ (Ss), welche Analogie wir ſchon anderswo bewieſen haben (§. 30.).

54. §.

Man kann die Aufgabe von den Centralkräften auch umkehren, und alsdann folgende Auflöſung anwenden, durch welche man zugleich beweiſen kann, daß die Centralkräfte, wenn ſie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältniſſe wirken, einen Kegelſchnitt beſchreiben. Es ſey (Fig. XXVIII.) FT das Perpendikel, welches man aus F dem Mittelpuncte der Kräfte auf die Tangente MQ herabgelaſſen. MVA ſey der in M küſſende Zirkel von einer krummen Linie, welche man beſchreiben ſoll; und FM ſey der Radius Vector. In dieſem Falle iſt f die Centralkraft $= \frac{FM}{FT^3 \times MA} = \frac{1}{FM^2}$; [*] oder $FM^3 = FT^3 \times MA$. Deßwegen iſt $FM^3 : FT^3 = MA : R$ (1): oder auch, weil die Dreyecke FTM, MVA ſich ähnlich ſind, ſo werden MP und MO zu MA MV proportional: hiemit iſt $FM^3 : FT^3 = MA^3 : MV^3 = MA : MO = MA : 1$. Deßwegen iſt $MO = 1$; das iſt, MO iſt eine unveränderliche Größe. Nun aber nehmen wir von dieſen die halben Theile MC, MB, ſo wird MO als der Parameter $= MB$; denn MB iſt der halbe Parameter der Axe von dem Kegelſchnitte,

---

[*] Siehe de la Caille Leçons Aſtronom. §. 161.

weil MC, ML, MN, MB beſtändig proportional ſind, wie wir ſchon oben §. 26. bewieſen haben. Weil nun in den Kegelſchnitten allzeit *M*A zu *M*O, als der unveränderlichen Größe das nämliche Verhältniß haben, welches zwiſchen FM^3 und FT^3 iſt, und weil dieſes Verhältniß allezeit in den krummen Linien, welche durch die nach dieſem Geſetze wirkenden Kräften beſchrieben werden, beobachtet wird, ſo iſt es mehr als überzeugend, daß alle Puncten einer krummen zu beſchreibenden Linie ſolche ſind, durch welche der nämliche Kegelſchnitt gehen muß, und hiemit ein Kegelſchnitt beſchrieben wird. Was aber für eine Gattung der Kegelſchnitte eine ſolche krumme Linie an ſich nehme, das hängt eigentlich von der Projectionsgeſchwindigkeit ab, welche, wenn ſie gegeben wird, ſo kann man durch die Höhe *M*D und durch den Abſtand *M*F alle Gattungen der Kegelſchnitte beſtimmen, ſo wie wir genugſam bisher bewieſen haben.

Ph.Ab.VII.T. pag.244

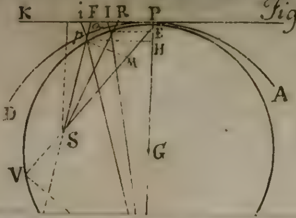

K
i
F
I
R
P
p
o
E
H
M
D
S
G
A
V

Fig.1

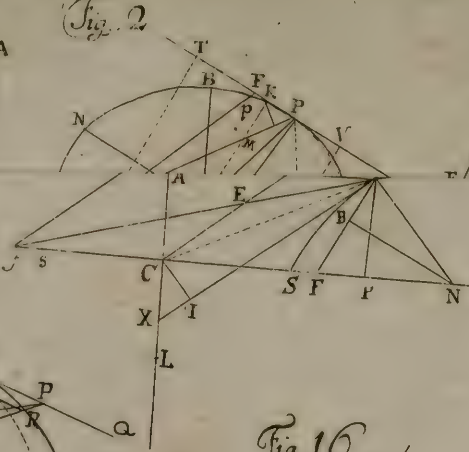

T
B
F
K
P
p
M
N
V
A
E
B
ſ
s
C
S
F
P
N
X
I
L

Fig. 2

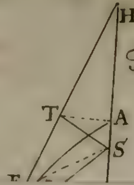


Fig.3

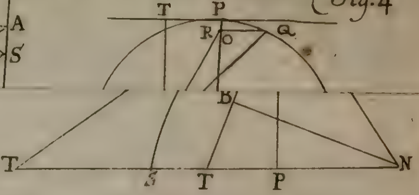

T
P
R
O
Q
B
T
S
T
P
N

Fig.4

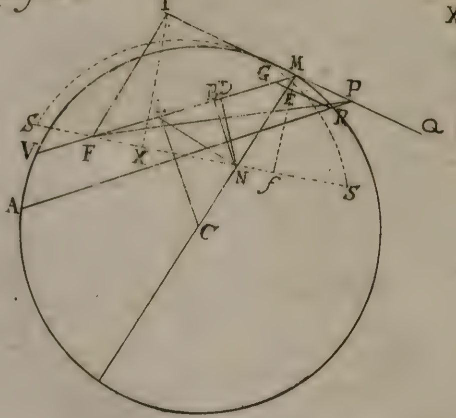

T
M
G
P
D
E
R
S
V
F
X
N
f
S
A
C
Q

Fig.15

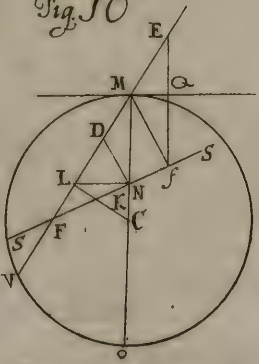

E
M
Q
D
L
N
K
C
f
S
S
F
V
O

Fig.16

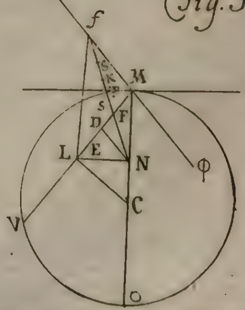

f
S
K
P
M
s
D
F
L
E
N
Φ
C
V
O

Fig.17

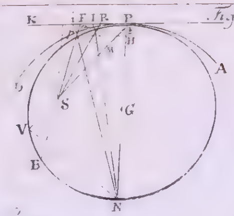


Fig. 1
K
i F I R P
H
A
S
G
V
E
N

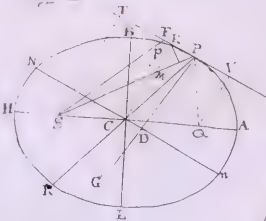


Fig. 2
T
B
F E
p
P
V
N
M
H
S
C
D
Q
A
R
G
n
L

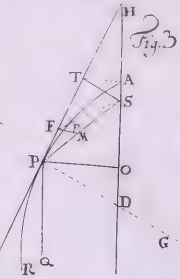


Fig. 3
H
T
A
S
F
M
P
O
D
G
R
Q

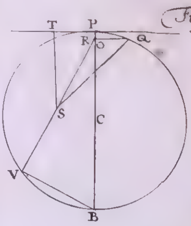


Fig. 4

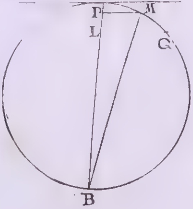


Fig. 5

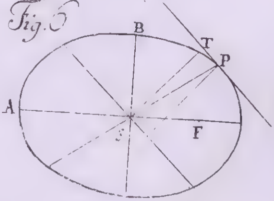


Fig. 6

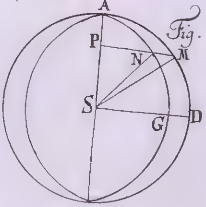


Fig. 7

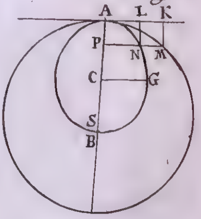


Fig. 8
A
L
K
P
N
M
C
G
S
B

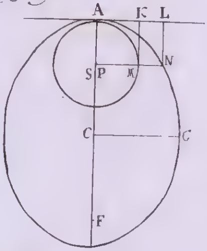


Fig. 9
A
K
L
N
S
P
M
C
C
F

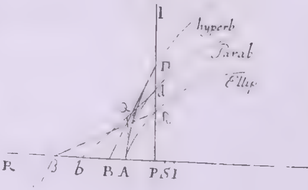


Fig. 10
I
hyperb
Parab
Ellip
R
β
b
B
A
P S I

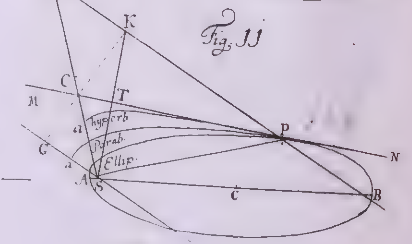


Fig. 11
K
C
T
M
a
hyperb
Parab.
Ellip.
G
a
A
S
P
N
C
B

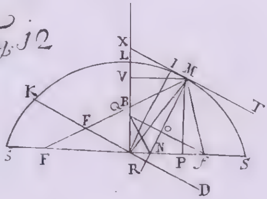


Fig. 12
X
L
V
I
M
K
Q
B
F
o
N
S
F
R
P
f
S
T
D

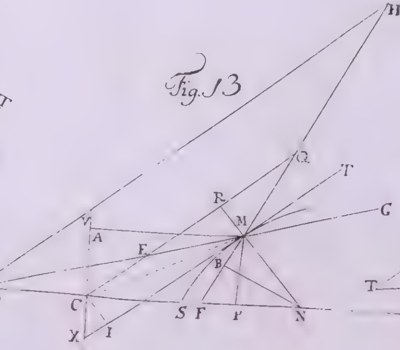


Fig. 13
H
Q
T
R
G
M
V
A
E
B
C
S
F
P
N
X
I
L

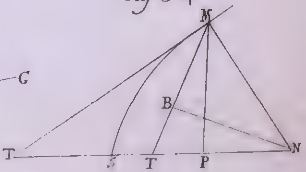


Fig. 14

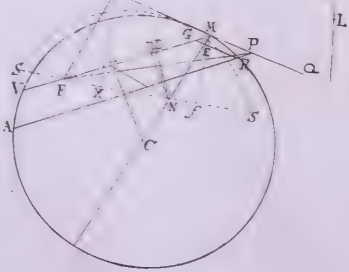


Fig. 15
T
M
G
E
P
R
Q
S
V
F
X
N
f
S
A
C

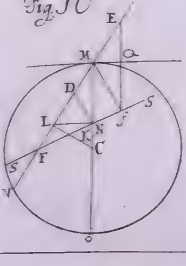


Fig. 16
E
M
Q
D
S
L
K
N
f
C
F
S
V
o

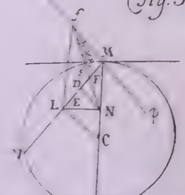


Fig. 17
f
M
D
F
L
E
N
p
C
V
c

Fig 18

Fig. 19

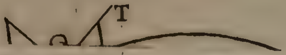


Fig. 20

AL HISTORY

Fig 18

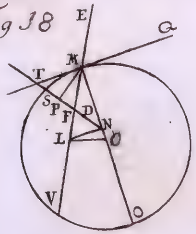

E
Q
M
T
S
P
F
D
N
L
O
V
O

Fig. 19

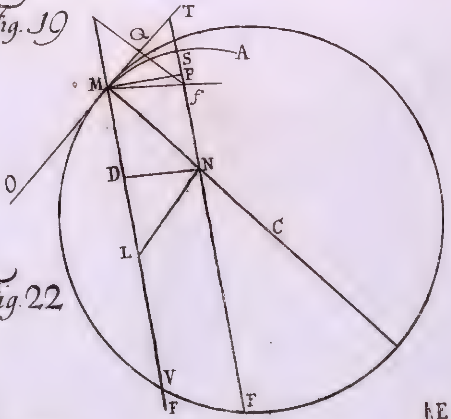

T
Q
S
A
M
P
f
O
N
D
C
L
V
F
F

Fig. 20

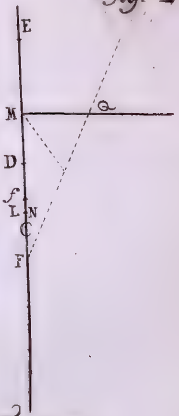


Fig. 21

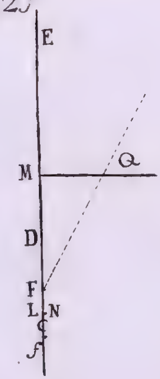


Fig. 22

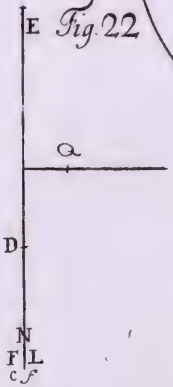


Fig. 23

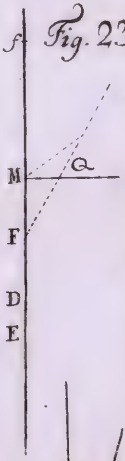


Fig. 24

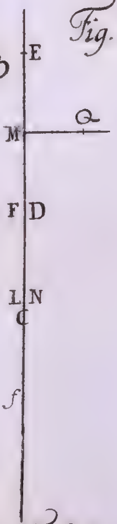


Fig. 25

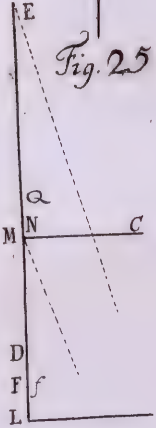


Fig. 26

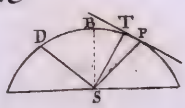


Fig. 27

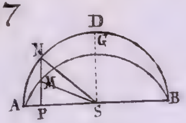


Fig. 28

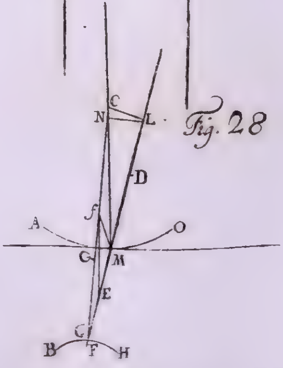
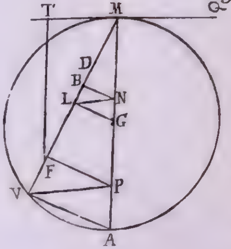

C
N
L
D
A
f
O
G
M
E
C
B
F
H

Fig. 29


T
M
Q
D
B
L
N
G
F
P
V
A

Ein Brief
von der
Berechnung
des
im Jahre 1769.
erſchienenen
Kometen.

Mein Freund!

1. §.

Ich bedaure Sie von Herzen. „So viel Arbeit, ſchreiben „Sie, und dennoch nichts richtiges; gewiß das läßt etwas „verdrüßlich“ —. Sie haben Recht, mein Freund! Ich ärgere mich ſelbſt über den mißlichen Fortgang Ihrer gewiß ungemein mühſamen Arbeit. Würde ich nicht von Ihrer geübten Geſchicklichkeit, und gründlichen Kenntniß in aſtronomiſchen Gegenſtänden überzeuget ſeyn, ſo würde ich mich wohl über Ihre fruchtloſe Arbeit ein wenig luſtig machen: Aber ſo haben Sie nichts gewagt, was Ihre Kräfte überſtieg. Doch, wenn Sie ſich ſchon mit dieſem aſtronomiſchen Kalkulus was längers herumbalgen müſſen, ohne bisher Ihre Arbeit durch einen richtigen genauen Auswurf des Berechneten belohnt zu ſehen, ſo müſſen Sie deßwegen den Muth nicht verliehren. Ich habe es aus eigener Erfahrung, daß man am Ende allzeit ein größeres Vergnügen findet, je ſchwerer einem die Entdeckung des Geſuchten geworden iſt. Glauben Sie mir, daß man in der Aſtronomie vieles auch durch Fehlen lerne. Wir wollen es dem einzigen Halley glauben, daß er nach ſeinem Zeugniſſe niemals in ſeinen Berechnungen ſich ſoll geirret haben. Die übrigen, und unter dieſen die berühmteſten und vollkommenſten Meiſter der Mathematik und Aſtronomie rechnen es ſich nicht zur Schande, wenn man Sie in Ihren ſonſt vortreflichſten Werken eines eingeſchlichenen Fehlers überzeuget. Noch allzeit, ſagen ſie, hat man die aſtronomiſchen Werke von ihren eingeſchlichenen Fehlern verbeſſert, und man wird es auch wohl noch für die Zukunft thun müſſen.

2. §.

Sie haben ſich über die Berechnung des letzt erſchienenen Kometen gewagt, und dieſes Ihr gewiß mühſames Unternehmen rechtfertiget auch den unglücklichen Ausfall Ihrer Arbeit, wie Sie ſelben nennen, ſchon ziemlichermaſſen: denn die Berechnung eines Kometen iſt gewiß in ſich ſelbſt einer der wichtigſten und ſchwerſten Gegenſtände der Aſtronomie. Dieſe giebt auch den geübteſten Meiſtern viel zu ſchaffen; aber eben darum macht Ihnen dieſe Arbeit ſchon viele Ehre, wenn Sie doch nicht auf den Nutzen einer auch am Ende nicht gar zu richtig gerathenen Arbeit ſehen wollen. Sie beſchweren ſich über die Methode, welche man gemeiniglich für dieſe Berechnung anſetzet. Sie wünſchen eine andere, und begehren von mir wenigſt eine Anleitung, dieſe Methode mit mehrerem Vortheile ohne ſo vielen Zeitverluſt und ungemein groſſe Mühe anwenden zu können. Allein ich weis bisher noch keine andere, welche mit größerem Vortheile und Genauigkeit für die Berechnung eines Kometen, als die jetzige allgemeine und bekannte Methode möchte angegeben werden. Sie wiſſen es ſelbſt. Heluelius hat die Parabole der Kometen erfunden; Newton war der erſte, welcher eine Methode angegeben, dieſelben zu berechnen; und Halley hat dieſe Methode ziemlich verbeſſeret. Die jetzigen Aſtronomen gehen noch den nämlichen Weg, und, nachdem Herr de la Caille[*], und nach Ihm Herr de la Lande in ſeinem vortreflichen aſtronomiſchen Werke[**] und anderswo[***] die Theorie der Kometen und ihre Berechnung durch neue Zuſätze und allgemeine Tabellen für die wahre Anomalie derſelben aufgekläret, und vollkommener gemacht hat, ſo würde ich wohl unbeſcheiden ſeyn, wenn ich Sie anderswohin als auf dieſe vollkommenſten Meiſter anwieſe.

3. §.

„Aber, ſchreiben Sie, ſchon dreymal habe ich umſonſt gearbeitet“ —. Ich glaube es Ihnen, mein Freund, wenn Sie auch geſchrieben hätten, daß Sie es dreyßigmal umſonſt verſucht haben. Wir haben Beyſpiele von den geſchickteſten Meiſtern, daß es Ihnen nicht beſſer ergangen iſt. Ich würde gar zu ausſchweifend werden, wenn ich Ihnen davon alle Urſachen eines für dieſe Berechnung übel gerathenen Verſuches angeben wollte; genug! daß Sie ſelbſt wiſſen, daß ſich dieſe bekannte Methode der Berechnung der Kometen theils auf die Genauigkeit der Beſtimmung der geraden Aſcenſion und Abweichung des Kometen; theils auf die Annehmung eines ungewiſſen Verhältniſſes zweener Abſtände gründet, oder daß ſelbe durch die ſogenannte Poſitio Falſi müſſe ausgearbeitet werden. Sie irren ſich alſo, wenn Sie anderswo als in der willkürlichen Annehmung dieſer zwoen Diſtanzen, welche in Ihrem Kalkulus den wahren Abſtänden des Kometen von der Erde noch nicht gar zu nahe gekommen ſind, die Urſache des Beſchwerniſſes dieſer Methode und Ihrer bisher noch unrichtigen Berechnung aufſuchen. Und wie gemein iſt nicht dieſer Fehler in un-

---

[*] Siehe de la Caille Leçons Aſtron. §. 177. &c. & §. 527. &c.

[**] Siehe de la Lande Aſtron. Tom. II. Liv. XIX.

[***] Théorie des Cometes (en Tables Aſtron. de Halley pag. 70. & ſuiv. 1859.)

ſerem Falle? Man muß wohl ziemlich glücklich oder doch der erfahrenſte und geübteſte Meiſter in der Aſtronomie ſeyn, wenn man ſchon auf das erſte oder zweytemal für zwo Beobachtungen ſolche zween Abſtände anzunehmen weis, welche einer dritten Beobachtung, als dem ächten Geſichtspuncte der ganzen Berechnung genug thun. Hernach ſetze man, daß eine ſolche dritte Beobachtung, welche die Leiterinn des ganzen Kalkulus iſt, nicht vollkommen genau ſey, ſo iſt es wohl um die Richtigkeit der ganzen Berechnung auf das neue geſchehen. Das ſchlimmſte dabey iſt, daß man zur genauen Beſtimmung der zween willkürlichen Abſtänden keine gewiſſe Erleichterungsmittel an die Hand geben kann. Nur allein gewiſſe Umſtände der Erſcheinung des Kometen; als nämlich ſeine Lage, ſein Ab- oder Zunahm in der beobachteten Länge, Breite und Abweichung, die Wendung ſeiner Dunſtſäule, die Größe ſeines Durchſchnittes, die Blaſſe oder Helle ſeines Lichtes können einen geſchickten Aſtronomus auf die Spur der ächten Abſtände des Kometen von der Erde führen, durch welche er hernach eine dritte Diſtanz und alſo alle ſeine Elementen beſtimmen kann. Sie müſſen es ſich alſo, mein Freund, gar nicht verdrüſſen laſſen, daß Sie zu dreymal umſonſt gearbeitet haben, beſonders, wenn Sie die graphiſche Entwerfung der verſchiedenen Parabolen, welche man zur Erleichterung der Berechnung der wirklichen Parabole eines Kometen ausgedacht hat, * nicht zu Hilfe genommen haben.

4. §.

Nun ſehen Sie ſelbſt, mein Freund, daß es ſich nicht wohl thun läßt, die ſo lang beybehaltene Methode, welche Ihnen ſo ſehr mühſam vorkömmt (wie ſie denn in ſich gewiß nicht die bequemſte iſt), auf eine vortheilhaftere Art, als es ſchon geſche-

hen

---

* Siehe Mr. de la Lande Aſtron. Liv. XIX. §. 2445.

hen iſt, zu erleichtern. Man müßte nur etwa eine ganz neue Methode für die Berechnung der Kometen erfinden, wo man nicht ſo viele Umſchweife nöthig hätte, und wo man ſonderlich die willkührliche Annehmung der zwoen Diſtanzen, welche dieſe Berechnung wohl etwas langweilig und verdrüßlich machen, vom Halſe brächte. Aber nicht wahr, das wollen wir wohl bleiben laſſen? Es iſt doch noch leichter, ſich in eine ſchon erfundene obwohl etwas harte Methode zu ſchicken, als eine ganz neue zu erfinden. — Doch Sie erinnern ſich vieleicht nicht, daß ſchon Newton für die Berechnung der Parabole eines Kometen nebſt der bekannten und jetzt gebräuchlichen Methode noch eine andere ausgedacht habe *), wo er nämlich einen von dem Kometen binnen enger Zeitfriſt beſchriebenen Laufbogen als unendlich klein annimmt, und deßwegen ſelben als eine gerade Linie vermög der einzelen Grundſätzen einer ebenen Trigonometrie berechnet, und nachmals die ganze Parabole beſtimmet. Nun wie gefällt Ihnen dieſe Methode der Berechnung eines Kometen? Selbe wäre doch, als die einfachſte und aufgeklärteſte der allgemeinen und ſchon bekannten Berechnungsform vorzuziehen? „O! ſagen Sie, ſelbe „muß gewiß nicht viel taugen, ſonſt würden ſie die jetzigen Aſtro„nomen ſchon längſt hervorgeſucht haben.“ — Ihre Ahndung iſt gründlich, mein Freund! man weis ſchon, daß dieſe Methode von keinem Gebrauche ſey; denn man hat es bewieſen, daß dieſe vom Newton angegebene zweyte Methode von einer unbeſtimmten Auflöſung ſey; wie dieſes auch leicht zu begreifen iſt, weil Newton nur das einfache, nicht aber das zuſammen geſetzte Verhältniß der Zeit und der Bewegung des Kometen in ſeiner Länge anſetzet, hiemit die Größe des zu berechnenden Bogens allzeit unbeſtimmt bleibt. Nun iſt alſo Ihre Hofnung auf eine neue und

---

*) Siehe Newton. Lib. I. Princip. Mathem. & opuſcul. XVII. de Mundi Syſtemate.

leichtere Methode für die Berechnung der Kometen wieder zu Waſſer geworden? aber haben Sie Geduld, mein Freund! ich muß noch vorher ein paar Worte ſagen, bis ich Sie etwa wiederum aufzumuntern vermöge.

5. §.

Wiſſen Sie alſo, daß man ſich bey Entdeckung der Unrichtigkeit dieſer Methode ſehr bemühet hat, ſelbe zu verbeſſeren, und brauchbar zu machen. Zu dem Ende hat man den gemachten Einwurf wegen dem Unbeſtimmten dieſer Auflöſung gehoben, und durch eine gehörige Proportion, welche aus dem Verhältniſſe der Zeit und der Geſchwindigkeit des Kometen zuſammen geſetzt iſt, und ſich auf das Verhältniß des Abſtandes des Kometen von der Erde in der mittleren Beobachtung zu dem Abſtande der erſten und dritten Beobachtung beziehet, und wovon ich gleich unten (§§.10. 11.) reden werde, die unbeſtimmte Auflöſung der newtoniſchen Methode in eine beſtimmte verwandelt. Man hat noch vieles daran zu verbeſſeren geſucht; alſo z. B. hat man den Bogen der Parabole des Kometen, deſſen Beſchreibung ſich nach der Methode des Newtons auf eine Zeitfriſt von etlichen Stunden einſchränkte, um eine größere Genauigkeit der Beobachtungen beyzubehalten, mehr ausgedehnet, und einen Bogen der Laufbahne des Kometen, welcher in etlichen Tagen beſchrieben wurde, und in welchem man mehrere Beobachtungen machen könnte, angenommen. Es iſt aber klar, daß man hierdurch der Genauigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen einen ziemlichen Abbruch gethan; denn Sie werden ganz leicht einſehen, daß man einen ſolchen Bogen der Parabole, welcher binnen etlichen obſchon nicht gar zu ſehr auseinander geſetzten Tagen von dem Kometen beſchrieben wird, und welchen man doch als eine gerade Linie annimmt (§. 4.), nimmer mit der engſten Genauigkeit wird berechnen können. Es werden alſo diejenige, welche dieſe Methode, für die genaueſte und richtigſte angeben, mit ihren Gründen nicht hinausſehen. Ich will gar nicht ſagen, wie ſehr ſich der Werth einer vollkommenen Genauigkeit in dieſer Methode wegen der verſchiedenen Zeit der Erſcheinung der Kometen, wegen ihrer Lage, wegen ihres nahen Abſtandes vom Perihelium, wegen ihrer verſchiedenen Geſchwindigkeit, und anderen Nebenurſachen verminderen könne. Man wird alſo mit Wahrheit ſchließen können, daß dieſe Methode für die Berechnung der Kometen zwar nicht die genaueſte iſt, doch aber derſelben ziemlich nahe kömmt.

6. §.

Aber wozu dann dieſes alles? werden Sie mit Ungeduld ausrufen. Ich will es Ihnen ſagen, mein Freund, daß man aus dieſer beſchriebenen, obſchon nicht gar zu genauen Methode einen groſſen Vortheil für die allergenaueſte und richtigſte Berechnung der Kometen ziehen kann; einen ſolchen Vortheil, welchen Sie immer zur Erleichterung des ſo beſchwerlichen Kometen Kalkulus wünſchen können, und an welchen ich nicht eher gedacht habe, als ich eine Antwort auf Ihren letzten Brief ſchicken wollte. Ich dächte, Sie würden damit zufrieden ſeyn, wenn ich Sie verſichere, daß Sie bey Anwendung dieſer Methode nimmer einen Kometen dreymal umſonſt berechnen dürfen, ſo wie Sie ſich deßwegen in Ihrem Briefe beklagten, und welches Ihnen wegen angeführten Urſachen (§. 3.) noch wohl öfters begegnen könnte. Ich will Sie aber noch überdas gewiß verſicheren, daß Sie allzeit ſchon auf das erſtemal die genaueſten Verhältniſſe der zween Abſtände, welche zur genauen und richtigen Berechnung der Kometen nöthig ſind, werden anſetzen können, wenn ſie dieſe Methode zuvor anwenden werden. Freylich bekommen Sie durch ſelbe nicht die genaueſten Elementen des Kometen (§. 5.): aber ſchon Vortheil genug, daß Sie hernach ohne mehreren Zeitverluſt, ohne die ungewiſſe doch ſo mühſame weitſchichtige Berechnung zu verſuchen, ohne die Furcht noch öfters mit ſo vielem Aufwande der Zeit und unnütz angewandter Mühe ſogleich zu der bekannten Methode, welche wir alſo als die genaueſte und richtigſte aus allen gar nicht abzuſchaffen haben, ſondern nur ungemein erleichteret wird, ſchreiten können. Ich werde weiter unten noch von mehreren Vortheilen dieſer Methode zu reden kommen. Es freut mich alſo ſelbſt, daß ich Ihrem Anſuchen wider meine anfangs gehabte Hoffnung Genügen leiſten kann. Ich werde zu dieſem Ende dieſe erleichterende Methode, wovon Sie ſich aus dem geſagten (§. 5.) noch keinen aufgeklärten Begrif werden machen können, hier was ausführlicher beyſetzen, und zwar zum überzeugenden Beweiſe zugleich zeigen, wie Sie ſelbe auf die Berechnung des letztgeſehenen Kometen anwenden, und Ihren ſo oft wiederhollten Kalkulus glücklicher werden ſchlieſſen können. Glauben Sie mir, daß, wenn es Ihnen doch noch einmal beliebt, für die Berechnung dieſes Kometen einen Verſuch anzuſtellen, Sie damit werden zufrieden ſeyn. Sie fragen etwa: ob die Erfindung möge ganz meine ſeyn? Nein! dieſes nicht. Ich habe es Ihnen ſchon geſagt, daß Newton dieſe Methode ausgedacht, und daß ſie hernach von anderen verbeſſeret worden (§§.4.5.); aber nicht zu dieſer Abſicht, welche ich ſelber beſtimme; daß nämlich dieſe Methode zur ſicheren Erleichterung der andern ſchon bekannten und genaueren Methode kann gebraucht werden. Ueberdas, wenn Sie mit einer nicht gar zu genauen Richtigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen wollen zufrieden ſeyn, ſo mögen Sie auch damit die Elementen des Komets und ſeine ganze Parabole beſtimmen (§. 5.). Doch Sie werden die folgende Ausführung und die ſonderliche Anwendung dieſer Methode ſelbſt prüfen können. Laſſen Sie uns zur Sache gehen.

7. §.

Die Ankündung der Erſcheinung des letzt geſehenen Kometen, wie Sie wiſſen, haben wir dem Herrn Meßier in Frankreich, welcher ſchon ſo viele Kometen durch ſeine wachtbaren Beobachtungen entdecket hat, zu danken. Er beobachtete ſelben im jüngſt verfloſſenen Jahre 1769. den 14ten Tag des Auguſtmonats um 12. Uhr 30′, und ſetzte ſeine gerade Aſcenſion auf 38ᶜ 35′ 2″; ſeine nordliche Abweichung 11ᶜ 49′ 32″. An der Genauigkeit dieſer Beobachtung iſt alles gelegen, denn nach ſelber müſſen die angenommenen Abſtände geprüfet werden; und wenn die nach andern gemachten Beobachtungen und den willkührlichen Abſtänden berechneten Abweichungen, und gerade Aſcenſion nicht mit dieſer überein kommen, ſo muß man wiederum andere annehmen, und die Berechnung auf das neue wiederhohlen, ſo, wie es Ihnen ergangen iſt.

8. §.

Wir haben aber zur Ausführung und Anwendung der beſagten Methode noch andere Beobachtungen nöthig, wovon ich drey aus den in Wien gemachten Beobachtungen, welche in ihrer Zeitfriſt, wo ſelbe auf den hieſigen Obſervatorien ſind angeſtellt worden, nicht zu ſehr entfernet ſind. Es ſind folgende: I. den 3ten September beobachtete man den Kometen um 14^h 47′ 49″, wo er dann in ſeiner Länge 2^s 16^c 48′ 40″, in der ſüdlichen Breite aber 16^c 41′ 33″ zählte. II. Den 6ten September um 15^h 54′ 13″ hatte der Komet in ſeiner Länge 3^s 0^c 35′ 20″; in der Breite 19^c 23′ 27″. III. Den 9ten September um 16^h 12′ 16″ war die Länge des Kometen $3^s\ 17^c\ 0'\ 41''$; ſeine Breite $23^c\ 32'\ 58''$. Weiters war die Länge der Sonne in der erſten Beobachtung $161^c\ 43'\ 26''$; in der zweyten aber $164^c\ 40'\ 59''$; in der dritten $167^c\ 36'\ 45''$; da indeſſen der Abſtand der Erde von der Sonne nach Ausweiſung der Ephemeriden den 3ten September 10. 003237; den 6ten 10. 002897; den 9ten 10. 002575 war. Hier will ich noch die beobachtete Länge ſeiner Dunſtſäule, oder des ſogenannten Kometenſchweifes, welche bey 40^c, wie auch die Größe ſeines ſcheinenden Durchmeſſers, welcher, wenn wir den wahren Durchmeſſer des Kometen mit dem engliſchen Aſtronomus, dem Hrn. Dunn, dem Durchmeſſer des Mondes gleich annehmen, bey 17″ ausmachte, beyrücken; ſelbe können uns etwa noch zum Gebrauche ſeyn.

9. §.

Nun aber unſerm Vorhaben näher zu kommen, ſo ſetzen wir, daß T, B, *t* (I. Fig.) drey verſchiedene Orte der Erde ſind, aus welchen man an verſchiedenen Tagen; nämlich nach den angeſetzten Beobachtungen den 3ten, 6ten und 9ten September den Kometen in ſeiner Laufbahne beobachtet hat. Auf daß man nun den Laufbogen des Kometen, welchen er während dieſer drey Beobachtungen beſchrieben hat, und welchen man in D, G, *d* zur Ecliptik bezogen hat, nach angeführter Methode (4. §.) berechnen könne, ſo ziehe man aus T die zwo Linien TO und TN, welche zu BG und *td*, der zwoten und dritten Beobachtungslinie parallel und gleich ſind, indem ſelbe wiederum von andern zwoen parallelen und gleichen Linien nämlich $Tt = Od$ und $TB = NG$ unterſtützet werden. Sie ſehen klar, daß dieſe Veränderung der Figur der vorigen nach den wirklichen Beobachtungen gemachten Entwerfung ganz und gar nicht entgegen ſey; weil die Winkel DTN und DEG einander gleich verbleiben.

10. §.

Nun kömmt es darauf an, daß man zeige. was für Verhältniſſe, zwiſchen den Abſtänden des Kometen von der Erde und ſeiner Geſchwindigkeit man geſchickt anzuſetzen habe. Wo Sie dann auf dasjenige zu ſehen haben, was ich oben (5. §.) geſagt habe. Es iſt alſo $TN : TD = Gd.\ \sin OTD : Dd.\ \sin NTO$; denn in dem Dreyecke TNO iſt $TN : NO = \sin TOD : \sin NTO$; wiederum in dem Dreyecke ODd iſt $NO\ ;\ OD = Gd : Dd$; und endlich die Analogie des dritten Dreyeckes iſt $OD : TD = \sin OTD : \sin TOD$. Wenn wir nun dieſe drey ſonderlichen Proportionen in eine einzele zuſammen ſetzen, ſo wird $TN.\ NO.\ OD : NO.\ OD.\ TD = \sin TOD.\ Gd.\ \sin OTD : \sin NTO.\ Dd.\ \sin TOD$; und hernach $TN : TD = Gd.\ \sin OTD : Dd.\ \sin NTO$. Das iſt: der Abſtand des Kometen $BG = TN$ von der Erde T in der zweyten oder mittlern Beobachtung verhält ſich zu dem Abſtande TD der erſten Beobachtung; wie ſich das Factum der verfloſſenen Zeit binnen der zweyten und dritten Beobachtung Gd und des Sinus der Bewegung in der Länge OTD von der erſten zur dritten Beobachtung verhält zu dem Factum der ganzen Zeit zwiſchen der erſten und dritten Beobachtung Dd und des Sinus der Bewegung in der Länge NTO von der zweyten zur dritten Beobachtung.

11. §.

Auf eine gleiche Weiſe bekömmt man durch das Verhältniß des mittlern Abſtandes des Kometen von der Erde, nämlich TN zu dem dritten Abſtande deſſelben TO, oder td (9. §.), welches iſt wie das Verhältniß des Factum der Zeit zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung DG, und des Sinus der Bewegung

wegung in der Länge DTO von der erſten zur dritten Beobachtung zu dem Factum aus der Zeit zwiſchen der erſten und dritten Beobachtung D*d* und des Sinus NTD der Bewegung in der Länge zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung. Hiemit iſt in dem buchſtablichen Ausdrucke die Analogie TN : TO = DG. *ſin* DTO : D*d*. *ſin* NTD. Denn in den dreyen Dreyecken TND, OD*d*, ODT bekömmt man folgende Proportionen I. TN : ND = *ſin* TDN : *ſin* NTD. II. ND : OD = DG : D*d*. III. OD : TO = *ſin* DTO : *ſin* TDO. Nach geſchehener Zuſammenſetzung dieſer drey Analogien, und Auslöſchung der gleichen Glieder (worunter auch TDN = TDO enthalten ſind) überkömmt man wiederum die vorhergeſetzte Proportion TN : TO = DG. *ſin* DTO : D*d*. *ſin* NTD.

12. §.

Wenn wir alſo in den angeſetzten Proportionen (10. 11. §§.) das Verhältniß des mittlern Abſtandes NT zu den andern zween Abſtänden aus den gegebenen Beobachtungen berechnen, ſo werden wir in den Zahlen folgende Ausdrücke überkommen; nämlich I. NT : TD = 1 : 1, 130336. II. NT : *td* (TO) = 1 : 0, 941495; denn es iſt GD = 263184; G*d* = 260283; D*d* = 523467; NTD = 13^c 46′ 40″; NTO = 16^c 25′ 21″; DTO = 30^c 12′ 1″. Sie ſehen aber, daß uns in dieſen Verhältniſſen die Ausdrücke der Zahlen für die künftige Berechnung ziemlich beſchwerlich ſeyn würden: deßwegen wollen wir ſelbe durch Buchſtaben, welche ihren Werth ausdrücken ſollen, abkürzen. Es ſoll alſo die erſte Proportion (10. §.) durch NT : TD = 1 : *m*; die zweyte (11. §.) durch NT : *td* = 1 : *n* ausgedrücket werden. Weil wir aber nicht noch den wirklichen Werth, ſondern nur davon das Verhältniß wiſſen, ſo nehmen wir indeſſen TN = *z*.

13. §.

Doch ehe wir weiter gehen, ſo iſt es vor allen nothwendig, daß ich Ihnen eine Figur zeichne, in welcher die Lage des Kometen und der Erde entworfen wird, und welche, ſo viel es ſich in Zeichnung einer Figur thun läßt, mit den gemachten Beobachtungen (8. §.) übereins kömmt. Es ſoll alſo der Zirkel (II. Fig.) indeſſen eine Ellipſe, als die Laufbahne der Erde vorſtellen. Die Sonne ſey in S, T ſoll der Ort der Erde heißen, wo man die erſte Beobachtung des Kometen in C; und *t* der Ort der Erde, wo man die dritte Beobachtung des Kometen in *c* gemacht hat. D ſey der Ort des Kometen, ſo, wie ſelber ſchon zur Ecliptik bezogen iſt. Man ziehe nun DT, alſo zwar, daß DT einen Winkel mache, welcher gleich ſey dem Winkel der Differenz von der Länge des Kometen und der Sonne. Die Linie CT ſtelle den wahren Abſtand des Kometen von der Erde vor, und alsdenn ziehe man die Linie CD. Unter eben dieſen Bedingniſſen ziehe man die Linien *dt*, *ct*, *dc* und vereinige das D*d*, zu welcher aus C eine parallele und gleiche Linie C*i* ſoll gezogen werden. Weiters vereinige man das C*c*, als den kleinen Bogen des Laufkreiſes, welchen der Komet binnen der Zeitfriſt dieſer drey Beobachtungen beſchrieben hat. Endlich ziehe man das DT bis in A hinaus, und mit T*t* ſchließe man das Dreyeck A*t*T. Ich habe geſagt, daß dieſe Figur den gemachten Beobachtungen gleich kommen ſoll; denn, obſchon keine vollkommene Genauigkeit zur Entwerfung erforderlich, ſo läßt es ſich doch ganz und gar nicht thun, daß man in dieſem Stücke bloß ſeiner Phantaſie folge, ohne auf die Aehnlichkeit der Figur mit den gemachten Beobachtungen zurücke zu ſehen; denn, wenn man nicht die Winkel DTS, *dt*S, TS*t* den wirklich beobachteten wenigſt obenhin gleich macht, ſo kann es ſich fügen, daß die Linien TD, und

td außer oder innerhalb den AT zuſammen ſtoſſen, nach welchen denn AT und At entweder alle zwo oder die eine aus dieſen Linien als eine poſitive oder negative Größe muß angeſetzet werden.

14. §.

Jetzt müſſen wir noch überdas einige buchſtabliche Benennungen voraus ſetzen, welche uns zur Abkürzung des Kalkulus dienen können. Wir heißen alſo die Tangente der erſten aus der Erde beobachteten Breite des Kometen b; die Tangente aber ſeiner dritten geocentriſchen Breite nennen wir c. Hernach nehmen wir in dem Dreyecke TAt den coſ $A = f$; die Seite $AT = g$, und $At = h$. Sie dürfen ſich aber durch dieſes, daß ich AT und At als bekannt annehme, nicht irre machen laſſen; denn, weil die Länge der Sonne für die erſte Beobachtung $= 161^c\ 43'\ 26''$; für die dritte aber $= 167^c\ 36'\ 45''$ (8. §.), ſo folget, daß der Winkel TSt, welcher die Fortrückung der Sonne in ihrer Länge mißt, ſey $= 5^c\ 53'\ 19''$. Weiters ſind aus den Ephemeriden die Abſtände der Sonne von der Erde für jeden Tag der gemachten Beobachtungen bekannt (§. cit.): deßwegen kann man in dem Dreyecke STt die zween Winkel StT und STt ſammt der Seite tT finden. Setzt man nun die Winkel TtS und dtS zuſammen, ſo wird der Winkel AtT davon das Komplement ſeyn: zieht man aber von dem Winkel DTS den Winkel tTS ab, ſo bleibt der Winkel ATt übrig. Folglich ſind in dem Dreyecke AtT zween Winkel und die Seite Tt bekannt, man kann alſo die zwo Seiten At und AT finden. Es iſt nämlich $At = 0,\ 0119062$; und deſſen Logarithmus $= 8,\ 0757717$. Hernach iſt $AT = 0,\ 0936543$, und der Logarith. davon iſt $= 8,\ 9715280$. Ich will hier noch den Werth von einigen von mir berechneten Winkeln und Linien dieſer Figur beyſetzen, welche zu dem fernern Kalkulus dieſes Kometen nützen werden. Alſo iſt I. $DTS = 84^c\ 54'\ 46''$. II. $ATt = 3^c\ 17'\ 50''$. III. $dtS = 60^c\ 36'\ 4''$. IV. $AtT = 26^c\ 53'\ 11''$. V. $DAd = 30^c\ 12'\ 1''$. VI. $TSt = 5^c\ 53'\ 19''$. VII. $STt = 81^c\ 36'\ 56''$. VIII. $StT = 92^c\ 30'\ 45''$. IX. Logarith. von $Tt = 9,0171417$: der Werth aber des $Tt = 0,1040259$.

15. §.

Nun kömmt es darauf an, daß wir uns bemühen, den Werth von Cc als den Laufbogen des Umkreiſes, welchen der Komet binnen den 3 Beobachtungen (8. §.) beſchrieben hat, und, welchen wir indeſſen als eine gerade Linie annehmen (5. §.) zu unterſuchen. Ich habe es ſchon geſagt (4. §.), und Sie ſehen es ſelbſt klar, daß ſich die ganze Auflöſung bloß auf die trigonometriſchen Grundſätze gründe; doch wird es ungemein vortheilhafter ſeyn, wenn wir hier einen Lehnſatz zu Hilfe nehmen, und dadurch der trigonometriſchen Aufgabe: nach zwo gegebenen Seiten und dem enthaltenen Zwiſchenwinkel die dritte Seite des Dreyeckes zu finden, auf eine andere Weiſe, als die gewöhnliche Auflöſungsform iſt, genug thun; denn ſonſt würden wir mit den Differenzen und Semidifferenzen, mit Nachſuchung der Logarithmen für die Sinus und Tangenten noch vieles zu thun bekommen. Es wird alſo gut ſeyn, wenn wir einen kürzern Weg gehen, und beweiſen, daß in einem jeden Dreyecke z. B. in ABC (III. Fig.), in welchem die zwo Seiten BC und AC, welche wir indeſſen M und N nennen, und der Zwiſchenwinkel C (deſſen Coſinus wir $= a$ ſetzen) gegeben werden, die dritte Seite AB allzeit ſey $= M^2 + N^2 - 2MNa$; denn, wenn man auf die Grundlinie AC eine ſenkrechte Linie BE herabfallen läßt, ſo bekömmt man aus der Analogie $R : M\ (CB) = a\ (coſ\ \beta) : CE$

daß $CE = \frac{Ma}{R}$; und weil $R = 1$, ſo wird $CE = Ma$. Deßwegen iſt auch $EA = N\ (CA) - Ma$; weiters iſt $BE^2 = M^2\ (CB^2) - M^2 a^2\ (\beta E^2)$ und $EA^2 = N^2 - 2MNa + M^2 a^2$. Hiemit wird $AB^2 = BE^2 + EA^2 = M^2 - M^2 a^2 + N^2 - 2MNa + M^2 a^2$; oder $AB^2 = M^2 + N^2 - 2MNa$.

16. §.

Nun wird es wohl nicht mehr ſo ſchwer ſeyn, in dem Dreyecke $C i c^c$ (Fig. II.) aus dieſem Lehnſatze (§. 15.) und aus dem vorherangeſetzten (§§. 12. 14.) den Werth von $C c^c$ zu beſtimmen; denn es wird $C c^2 = ci^2 + i C^2$ (dD^2, weil $iC = dD$ §. 9.) Es iſt aber aus dem erſtgeſagten (§. 15.) $D d^2 = A d^2 + A D^2 - 2 f \times AD \times A d$ (denn f iſt der Coſ A Fig. I. §. 14. oder der Coſ C Fig. II.). Weil nun $A d = n z + h$; und $A D = m z - g$ (§§. 12. 14.), ſo iſt auch $A D^2 = m^2 z^2 - 2 m y z + g^2$; und $A d^2 = n^2 z^2 + 2 h n z + h^2$; und $- 2 f \times AD \times A d = - 2 f m n z^2 + 2 f g n z - 2 f h m z + 2 f g h$. Hernach iſt $i c = c d - i d$ (CD §. 13.), wo man dann in dem Dreyecke $t d c$ den Werth von $c d$ findet; nämlich $R : c^c = n z\ (td) : d c = c n z$ (§. 14.); und in dem Dreyecke TDC iſt $R : b = m z\ (TD)$; $DC = b m z = i d$: hiemit $c i = c n z - b m z = (cn - b m) z$. Wenn wir nun $cn - b m$ durch t anzeigen wollen, ſo iſt $i o^2 = t^2 z^2$. Deßwegen, wenn wir für $i c^2 + i C^2$ den herausgebrachten Werth anſetzen, ſo bekommen wir $C^c c^2 = t^2 z^2 + n^2 z^2 + 2 h n z + h^2 + m^2 z^2 - 2 m g z + g^2 - 2 f m n z^2 + 2 f g n z - 2 f h m z + 2 f g h$. Machen wir nun alle Coefficienten von z^2, nämlich $t^2 + n^2 + m^2 - 2 f m n = A$; die von z aber, nämlich $2 h n - 2 m g + 2 f g n - 2 f h m = B$; endlich $h^2 + g^2 + 2 f g h = C$, ſo haben wir zur Erleichterung der Berechnung die vorige Gleichung ziemlich abgekürzet, und es iſt alſo $C c^2 = A z^2 + B z + C$.

17. §.

Man ſieht klar, daß man jetzt vor allen den wirklichen Werth von z, durch welches wir N T, als den mittleren Abſtand des Kometen von der Erde angezeiget haben (§. 12.) unterſuchen müſſen; denn alsdann werden wir durch die obenangeſetzten Verhältniſſe (§§. 10. 11.) auch den Werth von den Abſtänden der erſten und dritten Beobachtung; das iſt, vom $t d$ (T O) und TD (§. 9.) finden, und nach dieſen drey bekannten Abſtänden des Kometen von der Erde ſeine ganze Parabole berechnen können; ſo wie ich weiter unten mit mehrerem ſagen werde. Dieſes zu bewerkſtelligen ſey (Fig. IV.) in S die Sonne; in T die Erde. C ſey der Ort des Kometen in ſeiner Laufbahne. N ſey der Ort des Kometen, in ſo weit ſelber ſchon zur Ecliptik bezogen iſt. $TN = z$ (§. 12.) ſey der ſogenannte abgekürzte Abſtand des Kometen (Diſtantia curtata). Wir werden nun aus der einfachen trigonometriſchen Rechnungsform in dem ſphäriſchen Dreyecke N′ C′ S′, welches bey N′ einen rechten Winkel hat, den Bogen C′ S′ oder den Winkel C′ T S′, welcher zwiſchen der Sonne und dem wahren Orte des Kometen iſt, finden können. Denn nehmen wir einmal den Coſinus dieſes gefundenen Winkels $= a$, und den Radius $= 1$, ſo iſt aus dem geſagten $CS^2 = ST^2 + TC^2 - 2a \times ST \times TC$. (§. 15.). Weil uns nun der Abſtand der Erde von der Sonne oder das S T bekannt iſt (§. 8.), ſo ſey $ST = d$. Man findet alſo das T C aus dem Dreyecke N C T, wo $TN = z$ (§. 12.) und der Winkel N T C die beobachtete geocentriſche Breite iſt (§. 14.), wovon wir alſo die Secans, welche wir indeſſen S nennen wollen, wiſſen. Hiemit iſt $R : S = NT\,(z) : CT = Sz$; und alſo

$CS^2 = d^2 + S^2 z^2 - 2\,adSz$ (§. 15.), welches iſt das Quadrat des Abſtandes des Kometen von der Sonne in der mittleren Beobachtung. Nun gleichet nach den newtoniſchen Grundſätzen * das Quadrat des von einem Kometen beſchriebenen Raumes, wenn man ſelbes mit ſeinem Abſtande multiplicieret, dem Factum des Quadrats des Raumes, welcher von einem jeden anderen Kometen binnen der nämlichen Zeit beſchrieben wird, und deſſen Abſtandes. Deßwegen, wenn man was immer für eines Kometen Raum (a) und Abſtand (b) weis, ſo iſt $a^2 b = Cc^2 \times CS$, und alſo bekömmt man eine Gleichung, aus welcher man das z finden kann. Nun iſt aber der Raum und der Abſtand eines Kometen, welcher einen mitteren Abſtand der Erde von der Sonne haben würde, ſchon berechnet und bekannt; denn nach des Newtons ſeinem Kalkulus**) würde ein ſolcher Komet jeden Tag 2432747 ſolche Theile in ſeiner Laufbahne beſchreiben, von welchen der mittere Abſtand der Erde von der Sonne 100000000 enthält. Deßwegen kann man folgende Gleichung der Verhältniſſe anſetzen: In einem Tage durchläuft ein Komet 2432747 Theile, wieviel durchläuft ein Komet in einer Zeit, wo ſelber in unſerem Falle den Bogen Cc durchlaufen hat. Das Quadrat des gefundenen Raumes multiplicire man nun mit dem Abſtande von 100000000, und das Product davon heiße man Q, ſo iſt $(Az^2 + Bz + C) \times \sqrt{(d^2 + S^2 z^2 - 2\,adSz)} = Q$. Und, weil man in dieſer Gleichung die Radikalzeichen weglaſſen muß, ſo wird $(Az^2 + Bz + C)^2 \times (d^2 + S^2 z - 2\,adSz) = Q^2$, wo man dann die folgende Gleichung der ſechsten Potenz überkömmt.

---

*) Siehe Lib. I. Princip. Newton. Propoſ. 16. Coroll. 6.

**) Siehe Lib. III. Princip. Newton. Coroll. Propoſ. 40.

$$\left.\begin{array}{l}
A^2 S^2 z^6 \\
+ 2 A B S^2 z^5 - 2 A^2 a d S z^5 \\
+ A^2 d^2 z^4 + 2 A C S^2 z^4 + B^2 S^2 z^4 - 4 A B a d S z^4 \\
+ 2 A B d^2 z^3 + 2 B C S^2 z^3 - 4 A C a d S z^3 - 2 B^2 a d S z^3 \\
+ 2 A C d^2 z^2 + B^2 d^2 z^2 + C^2 S^2 z^2 - 4 B C a d S z^2 \\
+ 2 B C d^2 z^2 - 2 C^2 a d z \\
+ C^2 d^2 - Q^2
\end{array}\right\} = 0.$$

18. §.

Wenn ich nun aus dieſer Gleichung der 6ten Potenze mit Hilfe der zu dieſem Ende vom Newton erfundenen bekannten Formel die Wurzel herausziehe, ſo bekomme ich den bisher geſuchten Werth des $NT = z$ (§. 12.), als des mittleren Abſtandes, welchen der Komet in der Ecliptik von der Erde vermög der zweyten Beobachtung (§. 8.) gehabt hat. Iſt nun dieſer mittlere Abſtand oder TN bekannt, ſo kann durch die oben angeſetzten Analogien (§§. 10. 11.) auch der Werth von den anderen zween Abſtänden (§. 9.) beſtimmet werden, welche Sie dann, wenn Sie auf die andere bekannte Methode der Berechnung eines Kometen übergehen wollen, ganz ſicher zur ferneren Berechnung annehmen, und verſichert ſeyn können, daß dieſe überkommenen Abſtände den wahren Abſtänden ſehr nahe kommen (§. 5.), und Sie ſich alſo in Ihrem ferneren Kalkulus, welchen Sie durch die bekannte Methode ausführen können, nimmer irren werden; noch minder ſelbe wiederhohlen dürfen; ſo wie ich Sie ſchon oben verſicheret habe (§. 6.), und welchen Vortheil ich zu dem Hauptgegenſtande dieſer Methode gemacht habe (§. cit.). Es iſt wahr, dieſe Methode, obſchon ſie zur richtigen Ausführung der bekannten Methode, welche doch allzeit, wie ich ſchon oft geſagt habe, wegen ihrer Genauigkeit keiner anderen weicht, nach unſrer Hauptabſicht nur eine vorläufige vortheilhafte Anwendung iſt, kann Ihnen etwa wegen Ausziehung der Wurzel der ſechsten Poteuze (§. 17.) etwas mühſam vorkommen; doch, weil wir dazu die Formel an der Hand haben, ſo iſt es eben keine ſo mühſame Arbeit. Hernach werden Sie es mir ungebethen eingeſtehen müſſen, daß es doch noch ungemein bequemer und vortheilhafter ſey, durch eine vorläufige Berechnung die zween Abſtände, deren ſonſt ſo ungewiſſe Annehmung die bekannte Methode ſo beſchwerlich macht (§. 3.), ſchon vorher in einer genugſamen Genauigkeit zu überkommen, als die ganze Berechnung in der andern bekannten Methode, wenn die Annehmung der zween willkührlichen Abſtänden nicht geglücket hat, mit ſo vielem Zeitverluſt und umſonſt angewandter Mühe zu groſſem Verdruſſe zu wiederhohlen, wie ich ſchon oben angemerket habe (§. 6.). Setzen Sie hinzu, daß dieſe Methode nicht nur allein nach dem Geſagten für die an dere bekannte Methode ſehr vortheilhaft ſey; ſondern ſelbe auch in einem gewiſſen Falle zur Berechnung eines Kometen von einem genugſamen Gebrauche ſey, wenn nämlich ein Komet nur durch etliche Tage (welches ſich nach Ausweiſung der Theorie der Kometen öfters fügen kann) kann beobachtet werden, und alſo dieſe Methode, weil der Laufbogen des Kometen binnen ſo enger Zeitfriſt ziemlich klein ſeyn wird, mehr Genauigkeit verſpricht (§. 5.). Ja ſelbe mag in dieſem Falle, wo man nicht ſo viele auseinandergeſetzte Beobachtungen machen kann, wohl gar der anderen bekannten Methode vorgezogen werden; denn es iſt gewiß, daß die Genauigkeit und Richtigkeit der Letzteren meiſtens von den vielen und auseinander geſetzten Beobachtungen abhängt. Ich dächte alſo, es werde Ihnen angenehm ſeyn, wenn ich Ihnen dieſe vortheilhafte Methode in ihrem ganzem Umfange zeige. Dieſes zu bewerkſtelligen, darf ich nur die angefangene Berechnung des letzt erſchienenen Kometen in eben dieſer

Methode zu Ende bringen. Damit Sie aber erkennen, daß dieſe Methode allgemein ſey, und auf einen jeden Kometen möge angewandt werden, ſo will ich Ihnen die weitere Berechnungsart durch allgemeine Ausdrücke zeigen. Ich werde hernach zum Schluſſe die von mir berechneten Elementen dieſes letztgeſehenen Kometen, welcher, wie Sie ganz leicht aus dem Geſagten begriefen werden, ſich durch die beyden Methoden berechnen läßt, beyrücken.

19. §.

Nachdem ich alſo den Werth von $NT = z$ als den mittleren Abſtand des Kometen (12. §.) durch Ausziehung der Wurzel der ſechſten Potenze (17. §.), und alſo auch den Werth von den andern zween Abſtänden gefunden habe (10. 11. §§.), ſo wird es ein leichtes ſeyn, alle noch übrigen unbekannten Größen welche zur endlichen Berechnung der Parabole noch nöthig ſind, in der zweyten Figur zu beſtimmen. Alſo finde ich z. B. I. den Werth von DC; denn es iſt $R : b$ (der Tangente der erſten geocentriſchen Breite 14. §.) $= TD : DC$. II. den Werth von dc; denn es iſt $R : c$ (der Tangente der dritten geocentriſchen Breite) $= td : dc$. III. den Werth von Dd^2; denn es iſt $dD^2 = Ci^2$ (9. §.) $= AD^2 + Ad^2 - 2 \cos A \times AD \times Ad$ (16. §.). IV. den Werth von Co; denn es iſt $Cc^2 = iC^2 + ic^2$ (16. §.), und $ic = cd - CD$ (13. §.). V. den Werth von SD und Sd als den zween abgekürzten Abſtänden des Kometen von der Sonne (17. §.); denn es iſt $SD^2 = ST^2 + TD^2 - 2 \cos STD \times ST \times TD$; und $Sd^2 = St^2 + td^2 - 2 \cos Std \times St \times td$ (15. §.). VI. den Werth des Winkels dSD, welcher die Bewegung des Kometen in ſeiner heliocentriſchen Länge mißt; denn in dem Dreyecke SdD ſind aus dem erſtgeſagten alle drey Seiten ſchon bekannt. VII. den Werth des Winkels der erſten, welche wir M, und der dritten heliocentriſchen Breite, welche wir m heißen wollen; denn es iſt SD : DC = R : *tang* M. Hernach Sd : dc = R : *tang* m. VIII. den Werth vom SC, als den Radius Vector der erſten, und vom Sc als dem Radius Vector der dritten Beobachtung; denn es iſt R : *ſec* M = SD : SC, und wiederum R : *ſec* m = Sd : Sc. IX. den Werth des Winkels cSC, welcher die Differenz der zwoen Anomalien iſt; denn in dem Dreyecke S c C ſind alle drey Seiten bekannt.

20. §.

Weil nun die zween Radii Vectores und die Differenz zwoer Anomalien bekannt ſind (§. 19. VIII. IX.), ſo kann man den Werth der beyden wahren **Anomalien** finden; und dieſes durch die bekannte Formel, durch welche wir folgende Gleichung der Verhältniſſe überkommen, daß nämlich die Summe der zwoen Wurzeln von den zween Abſtänden des Kometen, oder den zween Radiis Vectoribus zur Differenz eben derſelben Wurzeln ſich verhält, wie ſich verhält die Cotangente des vierten Theiles der Summe der zwoen Anomalien zur Tangente des vierten Theils der Differenz derſelben. Iſt die Anomalie bekannt, ſo überkömmt man auch den Abſtand des Perihelium, welcher dem Quadrate des Coſinus der halben wahren Anomalie gleichet, wenn ſelbes Quadrat mit dem Radius Vector multiplicieret, und durch das Quadrat des ganzen Sinus dividieret wird. Hernach verhält ſich die Quadratwurzel des Cubus vom Abſtande des Perihelium zur Einheit, wie ſich der Zwiſchenraum des Perihelium und der Zeit, wo der Komet die gegebene Anomalie gehabt hat, zur Zeit verhält, in welcher ein anderer ſchon berechneter oder ſogenannter Tafelkomet (Cometa tabularis) die nämliche Anomalie hat, wo man dann die Zeit findet, an welcher der Komet ſeinen nächſten Abſtand hat. Nun weiters die Länge des Knoten und die Neigung der Laufbahne des Kometen zu finden, will ich Ihnen zu einem leichteren Begrife eine ſonderliche Figur zeichnen, welche ſich aber auf die vorige zweyte Figur beziehet. Es ſey alſo E H (Fig. V.) ein Bogen von der Ecliptik, D und *d* ſollen die zween Orte des Kometen vorſtellen, ſo wie ſelbe zur Ecliptik bezogen ſind; hiemit wird der Bogen D *d* die heliocentriſche Bewegung des Kometen in ſeiner Länge anzeigen. D C und *d c* ſollen die zwo heliocentriſchen Breiten des Kometen ſeyn: wo man dann dieſe zween Bögen ſo weit hinaus ziehen ſoll, bis ſelbe in P als dem Polus der Ecliptik zuſammenſtoſſen. Man ziehe ferner C *c* bis zur Ecliptik, und in dem Puncte ☊, wo dieſer Bogen die Ecliptik berührt, wird der Knoten der Laufbahne des Kometen anzutreffen ſeyn. Weil nun in dem Dreyecke C D ☊ nur zwo Größen bekannt ſind, nämlich die Seite D C (§. 19. VII.) und der rechte Winkel bey D, ſo nehme man das Dreyeck P C *c* zu Hilfe, in welchem die Bögen P C und P *c* als die Complemente der zwoen Breiten des Kometen bekannt ſind (§. cit.), wie auch der Winkel *c* P C, als welcher die Bewegung des Kometen in der Länge mißt. (§. 19. VI.) Man kann alſo in dieſem Dreyecke *c* P C den Winkel P C *c* finden, und hiemit bekömmt man auch in dem Dreyecke C ☊ D dem Winkel D C ☊, welcher dem vorigen als ſeinem Verticalwinkel gleich iſt, wo man dann den Bogen D ☊ berechnen kann. Deßwegen, wenn man die **Länge des Knoten** finden will, ſo darf man nur den gefundenen Bogen zu der Länge des D hinzuthun, oder von ſelbem wegziehen, nachdem nämlich ein Komet ehender oder ſpäter den Knoten als den Punct D berühret. Die Länge aber des Puncts D iſt bekannt; denn in dem Dreyecke T D S (Fig. II.) iſt der Werth des Winkels D S T, wie auch die Länge des Puncts T oder der Erde in der erſten Beobachtung bekannt, zu welcher, wenn wir den Winkel bey S^c hinzuſetzen, bekommen wir die Länge des Puncts D. Endlich iſt es aus dem, was wir jetzt geſagt haben, klar, daß man in eben dieſem Dreyecke DC☊ (Fig. V.) den Winkel C☊D alſo auch die **Neigung der Laufbahne** des Kometen finden könne. Nun iſt nichts mehr übrig, als das wir die Länge des Perihelium beſtimmen, wofür ich wiederum eine beſondere Figur zeichne. Es ſey alſo $d\,\pi$ (Fig. VI.) ein Bogen der Ecliptik, ☊P ſey ein Bogen, welcher die Laufbahne des Kometen vorſtellt. Weil für den Punct C die Anomalie oder der Winkel CSP aus dem Geſagten dieſes Abſatzes bekannt iſt, ſo werden wir den Werth des Bogen P☊ finden, wenn wir nämlich dieſem Winkel den Bogen C☊, welchen wir ſchon oben aus dem vorigen Dreyecke CD☊ (Fig. V.) überkommen haben, hinzufügen. Hernach wiſſen wir aus dem erſtgeſagten den Winkel π☊P als die Neigung der Laufbahne des Kometen, wie auch den Winkel ☊πP, welcher ein rechter Winkel iſt. Man kann alſo den Bogen π☊ finden, welchen, wenn wir ſelben zur Länge des Knoten hinzuthun, uns die **Länge des Perihelium** giebt.

21. §.

Weil nun alles, was bisher von dieſer Methode geſagt worden, auf den letztgeſehenen Kometen nach den gemachten Beobachtungen (§§. 7. 8.) iſt angewandt worden, ſo darf man nur ſtatt der vorgeſetzten allgemeinen Ausdrücken (§§. 19.) den wirklichen Werth in Zahlen einrücken, und man wird alsdann deſſelben Elemente beſtimmen können, welche nach unſerer Berechnung folgende ſind. I. Die Zeit des Perihelium hatte man auf den 7ten Octobers, die Zurückkunft des Kometen auf den 28ten deſſelben anzuſetzen. II. ☊ oder der aufſteigende Knoten des Kometen iſt in ♍ oder im Geſtirne der Jungfrau bey dem 23^{c} anzutreffen. III. Die

Neigung ſeiner Laufbahne wird bey 42° 56′ ausmachen. IV. Der Abſtand des Perihelium iſt 20109, worunter man ſolche Theile verſtehet, dergleichen der Abſtand der Sonne von der Erde 100000 enthält. V. Die Länge des Perihelium iſt bey dem Löwe oder in ♌ 15° 52′. VI. Den Abſtand des Kometen in der erſten Beobachtung am 3ten Septembers (§. 8.) ſetzen wir an als 31997; in der dritten Beobachtung am 9ten Septembers als 29831. Aus dieſen Elementen wird nun die Parabole dieſes Kometen beſtimmet, wovon wir in der ſiebenden Figur einen rohen Entwurf geben, wo wir weiter nichts anzumerken haben, als daß die Buchſtaben C, S, T, die nämlichen Benennungen beybehalten, welche wir ſelben anderswo (§. 13.) für die zweyte Figur eingeräumt haben. Uebrigens wenn dieſe Elementen etwa nicht die genaueſten ſind, ſo werden Sie es mir zu gut halten; denn die berühmteſten Aſtronomen waren ſchon in Beſtimmung des Perihelium und der Zurückkunft dieſes Kometen nicht gar zu einig geweſen; wie Sie etwa ſelbſt in den gelehrten Nachrichten werden geleſen haben. Doch Sie dürfen ſich deßwegen gar nicht zu ſehr aufhalten; denn richtig iſt es, daß, im Falle die gemachten Beobachtungen, beſonders der geraden Aſcenſion und der nordlichen Abweichung dieſes Kometen in ſeinem abſteigenden Knoten (§. 7.) nicht recht genau ſey, ſich gar leicht ein merklicher Fehler in die Berechnung einſchleichen könne. Ueberdas war auch der Kern dieſes Kometen ziemlich groß (§. 8.) und ſein Rand nicht gar zu beſtimmt; man könnte ſich alſo in dem gemachten Beobachtungen leicht um etliche Secunden zum Nachtheil der geſchehenen Berechnung irren. Deßwegen iſt es für die Genauigkeit der gemachten Beobachtung allzeit vortheilhafter, wenn die Kometen in ihrer Erſcheinung weit von uns entfernet ſind.

22. §.

Nun, mein Freund, was ſagen Sie, das war gewiß ein ſehr langer Brief? Sollten ſelben die Richter der Briefkunſt zu ſehen bekommen, was für einen weitausſehenden Stoff zur Kritik würde er ihnen nicht an die Hand geben. Aber dieſe Herren werden ihn nicht zu ſehen bekommen; noch minder würden ſie ſelben leſen; denn was ſollte ihnen wohl ein aſtronomiſcher Brief? Sie ſelbſt, mein Freund, werden wohl darüber müde geworden ſeyn. Aber Sie begehrten ja von mir über die Berechnung dieſes Kometen etwas vollſtändiges, etwas vortheilhaftes. Wie wünſchte ich nur, Ihrem Verlangen genug gethan zu haben. Doch ich weis es, daß Sie auch eine geringe zu Ihrem Dienſte geſchehene Bemühung gütig aufnehmen. Sie wiſſen es, was ich mir für ein Vergnügen mache, mich mit Ihnen über mathematiſche Gegenſtände, ſonderlich wenn ſelbe die Aſtronomie, als die erhabenſte und edelſte Wiſſenſchaft betreffen, zu unterhalten, wenn es ſchon meinem Genie ſelbſt nicht ſo reizend und meinem Fortgange in der Aſtronomie nicht ſo vortheilhaft wäre, von mathematiſchen Gegenſtänden mit Ihnen in Briefen zu ſchwätzen. Sie ſollen allein über dieſen Brief in Ihrer Antwort den Ausſpruch geben; nicht ob ſelber gelehrt, ſondern ob Sie damit zufrieden ſeyn; denn Sie wiſſen, daß nicht ein eitle Ruhmſucht, ſondern die Lehrbegierde für ein vollkommneres Kenntniß und geübte Fertigkeit in der Aſtronomie die Hauptabſicht unſers Briefwechſels iſt. Leben Sie wohl, und halten Sie mich noch ferner Ihrer Freundſchaft werth; Ich bin

Ihr ergebenſter und

aufrichtiger Freund

L. G.

Nachſchrift.

23. §.

In dem Anhange Ihres Briefes verlangen Sie von mir eine Nachricht von den ſonderlichen Eigenſchaften dieſes Kometen. Ich rechne es mir zur Ehre, Ihrem Verlangen genug zu thun, und ich will alſo von der Länge und Dünne der Dunſtſäule oder des ſogenannten Schweifes dieſes Kometen ganz kurz einige Anmerkung dieſem Briefe beyfügen. Ich habe in den offentlichen Zeitungsblättern geleſen, daß Herr Dunn Aſtronomus in London die Länge der Dunſtſäule dieſes Kometen in ſeinen Berechnungen auf 40 Millionen Meilen angeſetzet habe.* Doch, wenn wir die gemachte Beobachtung für die Länge der Dunſtſäule, welche wir bey 40^c (§. 8.) angeſetzt haben, beybehalten, und ſelbe nach unſeren Elementen berechnen (§. 21.), ſo werden wir für die Länge der Dunſtſäule dieſes Kometen 4270760 deutſche Meilen herausbringen. Denn die Länge der Dunſtſäule eines Kometen, hat man aus der Gleichung der zwey Verhältniße des Radius zur Tangente des Winkels der Länge der Dunſtſäule, und des Abſtandes des Kometen von der Erde zur Länge der Dunſtſäule zu berechnen. Es iſt aber der mittere Abſtand der Sonne von der Erde = 22918 halben Durchmeßern der Erde, wovon ein jeder = 860 deutſchen Meilen gemeiniglich angenommen wird; hiemit, weil der Abſtand des Kometen den 9ten Sept. = 29831 (§. 20. VI.), ſo iſt ſelber, wenn wir ihn auf die deutſchen Meilen beziehen, = 5878960 deutſche Meilen, hiemit, wenn man

---

*) Siehe wieneriſches Diarium Nro. 78 in vermiſchten Neuigkeiten.

nach dem Geſagten folgende Analogie anſetzet, ſo iſt R. tang. 40° = 5878960 : x = 4270760, und alſo x oder die geſuchte Länge der Dunſtſäule dieſes Kometen = 4270760 deutſchen Meilen.

24. §.

Die Dünne der Dunſtſäule dieſes Kometen zu beſtimmen, ſo wollen wir indeſſen annehmen, daß die Kometen mit Atmoſphären, wie unſere Erde, umgeben ſind. Nach angenommenen dieſen Heiſcheſatz beweiſet Newton, * daß, wenn man ein Sphärchen, welches in ſeinem Durchmeſſer nur einen Zoll faßte, in die Entfernung eines halben Durchmeſſers der Erde, das iſt 860 deutſcher Meilen (§. 23.), über den Kern des Kometen übertrüge, ſelbes ſich ſo ſehr ausdehnen würde, daß es ſich über die Sphäre des Saturnus als des entfernteſten Planeten ausbreiten würde. Ueberdas würde dieſes Sphärchen, wenn man die Ausdehnungskräfte in dem umgekehrten Verhältniſſe der drückenden Maſſen oder Schweren annimmt, einen Raum von 1830252000000 cubiſchen deutſchen Meilen einnehmen. Wir wollen alſo unterſuchen, was für einen Theil von dieſer übergroſſen Sphäre des Saturnus die Dunſtſäule des Kometen, welche in ihrer äußerſten Breite etwa 1½. Grad hatte, ausmache. Weil man dieſe Dunſtſäule des Kometen als einen geſtumpften Kögel betrachten kann, welcher in ſeiner Länge 427060 deutſche Meilen mißt (§. 23.) ſo bekömmt man nach der gemeinen Rechnungsform des körperlichen Inhalts eines Kögels ſelbe = $\frac{1}{60000000}$ Theile der ganzen Sphäre des Saturnus. Weil aber nach der newtonianiſchen Berechnung die Dünne der Atmoſphäre eines Kometen in dem äußerſten Theile der Dunſtſäule ſich zur Dünne in dem Abſtande eines halben Durchmeſſers der Erde verhält, wie die Zahl 7 mit hundert und neun Nullen zur Einheit: ſo muß dann im Gegentheile um ſo weniger Maſſe in dem äußerſten Theile der Dunſtſäule eines Kometen ſich befinden, als in dem Abſtande eines halben Durchmeſſers der Erde iſt. Nun, wenn man die Grundlinie mit der Höhe des Kögels, welche in Rückſicht auf dieſen Kometen 4270760, multiplicieret, ſo bekömmt man die ganze Maſſe dieſes Kögels. Es iſt aber der körperliche Inhalt dieſer Dunſtſäule als eines Kögels = $\frac{1}{60600000}$ Theile der ganzen Sphäre, in welche ein Sphärchen eines Durchmeſſers von einem Zolle iſt ausgedehnet worden: hiemit bekömmt man für den Ausdruck der Maſſe von der Dunſtſäule dieſes Kometen eine Fraction, deſſen Zähler eine Einheit iſt, der Nenner aber 42 mit hundert und ſechszehen Nullen. Sie ſehen alſo, daß die Dünne der Dunſtſäule dieſes Kometen ſehr ungemein iſt. Die gemachten Beobachtungen bekräftigen das Geſagte; denn man ſah die Fixſterne durch die Dunſtſäule dieſes Kometen ohne die mindeſte Refraction durchſcheinen. Wollen wir von der Dünne dieſer Dunſtſäule auf die Dünne der Dunſtſäulen von anderen Kometen ſchließen; ſo könnten wir wohl einen Whiſton fragen, wie er einen ſolchen Gewalt der Gewäſſer aus der ſo ungemein dünnen Atmoſphäre eines Kometen habe beyſchaffen können; oder wie dann ſeine Vorſage beſtehen könne, daß beym Untergang unſerer Erde eine ſo ſehr dünne Atmoſphäre unſere Erde in Brand ſtecken würd. Doch davon, wie auch von ſeiner Berechnung des Kometen, welcher zur Zeit der Sündfluth ſoll erſchienen ſeyn, hätte ich Ihnen vieles noch zu ſagen.*

---

*) Siehe Newton. Tom. II. Opuſc. XVII. pag. 54 et ſequ. Edit. Lauſannae et Geneu.

---

*) Ich mache indeſſen die einzige Anmerkung, daß die Berechnung des Whiſtons für ſeinen Kometen, wovon er in ſeiner Theorie der Erde redet, ganz und gar unrichtig ſey; denn, obſchon ſel-

25. §.

Eben fällt es mir bey, Sie zu befragen, ob Sie nicht in den offentlichen Zeitungsblättern geleſen haben, wie man ſich bemühete, die groſſen Ueberſchwemmungen des Meeres, welche ſich im Auguſtmonathe in Amerika geäußert haben, der wirkenden Anziehungs Kraft des letzt erſchienenen Kometen zuzuſchreiben. Aber nicht wahr, dieſes mag wohl der Einfall eines Halbgelehrten oder etwan eines gar zu philoſophiſchen Zeitungsſchreibers geweſen ſeyn; denn ein verſtändiger Aſtronomus kann ſich gewiß des Gegentheils verſichern. Wir wollen davon einen Beweis geben. Herrn Dunn Aſtronomus in London, welchen wir ſchon vorher angezogen haben (§§. 8. 23.) ſetzet den körperlichen Inhalt des Kometen ſo groß als des Monds ſeinen an. * Weil nun die anziehenden Kräfte in dem geraden Verhältniſſe der Maſſen ſind, ſo können wir von den gleichen Maſſen des Mondes und des Kometen auf gleiche Wirkungen ihrer anziehenden Kräften ſchließen.

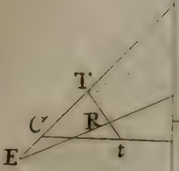
Neh=

---

be mit der bekannten periodiſchen Laufbahne und den Epochen, wie man ſelbe auf die Zeit der Sündfluth beziehet, ziemlich eintrift; und dieſer Komet auch um dieſe Zeit der Erde ſehr nahe gekommen wäre; ſo wiſſen wir doch aus der Theorie aller bisher noch bekannten periodiſchen Laufkreiſen der Kometen, daß ſelbe allzeit ſpäter erſcheinen, als ihr Daſeyn vermög des genaueſten Kalkulus erfordert wird. Weil nun Whiſton ſeinen Kometen ohne den Abzug der gewöhnlichen Verſpätung ihrer Rückkunft berechnet hat; ſo wird wohl ſeine Berechnung nimmer genau ſeyn, noch auch ſeine daraus gezogene Folge Stand halten.

*) Siehe wieneriſches Diarium Nro. 78.

Nehmen wir nun einmal die Wirkung der anziehenden Kraft des Mondes in Rückſicht auf die Fluthe des Meeres, und ſetzen wir ſelbe in ein Verhältniß mit der wirkenden Anziehungskraft des Kometen. Weil aber das Verhältniß des Abſtandes des Mondes von der Erde zu dem Abſtande des Kometen von der Erde durch 1 : 114 mag ausgedrücket werden; denn der Mond iſt von uns 60 halbe Durchmeſſer der Erde oder 51600 deutſche Meilen, der Komet aber vermög des vorhergeſetzten Abſtandes 5878960 deutſche Meilen entfernet (§§. 21. 23.), welche beyde Abſtände unter ſich alſo das nämliche Verhältniß haben, wie 1 : 114. Nun ſind aber die Wirkungen der anziehenden Kräften in einem umgekehrten gezweyfältigten (ratione dupplicata) Verhältniße der Abſtände: hiemit bekommen wir für das Verhältniß der Wirkungen der anziehenden Kraft des Kometen auf die Erde, und der nämlichen Kraft des Mondes auf die Erde in Zahlen, wie 1: 12996. Es iſt alſo die Wirkung der anziehenden Kraft des Kometen der $\frac{1}{12996}$ Theil von der anziehenden Kraft des Mondes. Da nun der Mond in ſeinem nächſten Abſtande nur eine gemäßigte Fluthe des Meeres durch ſeine Anziehungskraft bewirket, wie ſollte man wohl auch nur wahrſcheinlicher Weiſe der Anziehungskraft des erſchienenen Kometen, welche nach dem Bewieſenen gleichſam als ein unmerklicher Theil der Anziehungskraft des Monds kann angeſehen werden, die thätige Urſache ſo heftiger Ueberſchwemmungen zumuthen können? Hernach, weil wir für die Anziehungskraft des Kometen die Analogie der Anziehungskraft des Mondes, wegen Gleichheit ihrer Maſſen beybehalten können, ſo würden wir in beyden wohl auch auf die Gleichheit noch anderer Nebenumſtände ſchließen können. Alſo z. B. der Mond verurſachet durch ſeine anziehende Kraft die Fluthe des Meeres nur in ſeinem nächſten Abſtande; und zwar erſt ein oder zween Tage nach ſelbem. Wiederum die Fluthe, welche von dem Mond verurſachet wird, iſt ziemlich mittelmäßig, aber doch allgemein in allen Meeren: da hingegen nach dem Zeugniſſe der in Zeitungen gegebenen Berichten dieſe ſtürmenden Ueberſchwemmungen nur in dem einzigen Amerika am Ende des Auguſtmonaths ſich äußerten; da doch der Komet, wenn wir auch nicht auf die ſo ungemein verſchiedenen Abſtände des Kometen und des Mondes von der Erde ſehen wollten, ſeinen nächſten Abſtand erſt bey dem 10ten Sept. hatte ꝛc. ꝛc. Wir wollen es alſo immer glauben, daß dieſe gemachte Muthmaſſung niemals der Gedanke eines geſchickten Aſtronomus geweſen ſey.



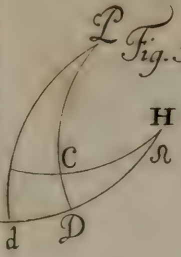


Fig. 5

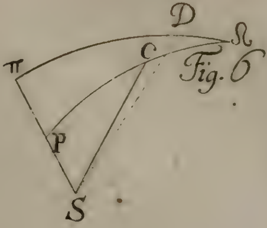


Fig. 6

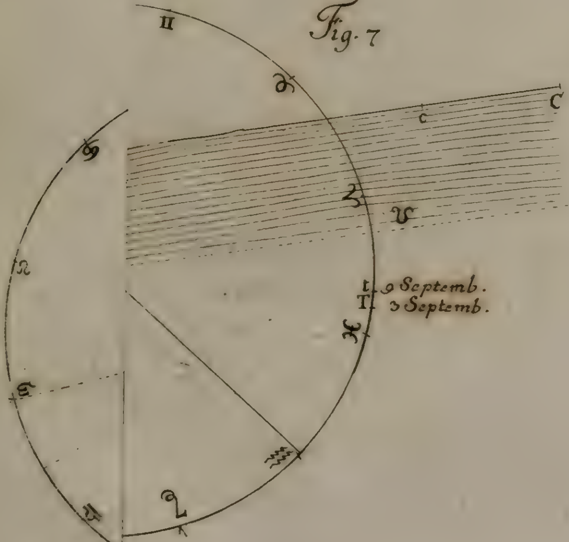


Fig. 7

t 9 Septemb.
T 3 Septemb.

tobr

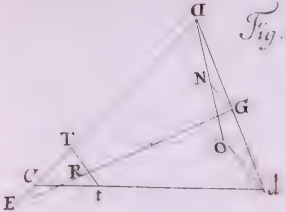


Fig. 1
a
N
G
T
O
C
R
E
t
d

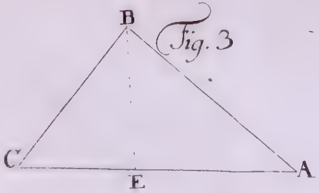


Fig. 3

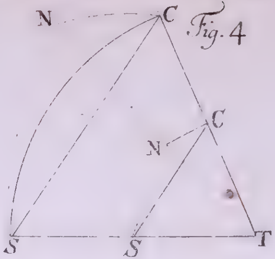


Fig. 4

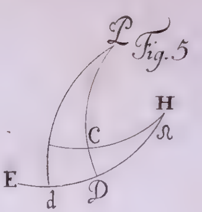


Fig. 5

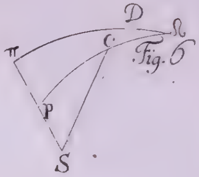


Fig. 6

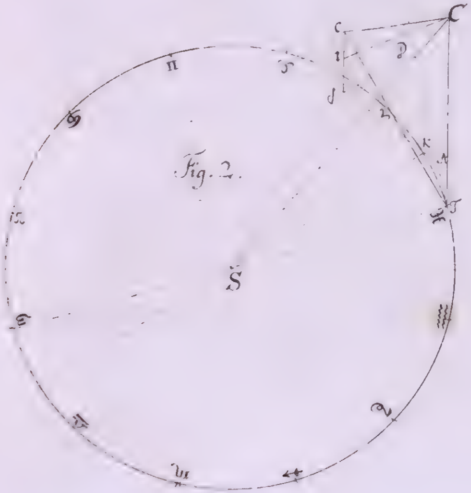


Fig. 2

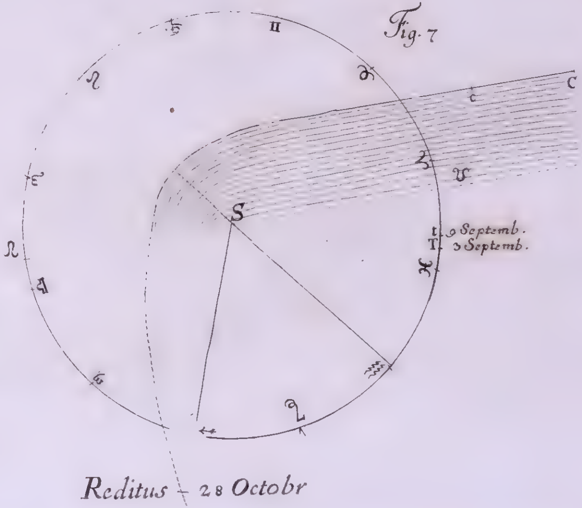


Fig. 7
c
c
S
t. 9 Septemb.
T. 3 Septemb.
Reditus 28 Octobr

Verſuch
einer kurzen
Abhandlung
von dem unterirdiſchen Baue
bey
Bergwerken,
entworfen
von
Carl Auguſt Scheidt.

1768.

Von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken überhaupt.

Ich muß zum voraus erinnern, daß hier nicht lauter Neues geſagt werden wird; denn um des Neuen willen muß verſchiedenes, was in den alten Bergbüchern ſtehet, mit berühret werden; es ſoll aber in möglichſter Kürze geſchehen, weil in jenen Büchern weiter darüber nachgeſchlagen werden kann. Was ich zu ſagen willens bin, iſt nur in Abſicht auf die Art der Anwendung bey dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken neu, und ſoll unter dem Alten in gewiſſen wenigen Abſchnitten dieſer Schrift erſcheinen. Ich werde einige bekannte Sätze anführen, die bey dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken mit Nutzen angewandt werden können, in den alten Bergbüchern aber nicht erwähnet ſind. Endlich will ich eine Schachtzimmerung und Mauerung vorſchlagen, die ihrer Feſtigkeit und Dauer wegen bauverſtänſtändigen Bergleuten vielleicht nicht mißfallen dürfte. Glauben ſie, daß dieſe Bauart noch einige Verbeſſerung nöthig habe, ſo bin ich wohl zu frieden, wenn es mit Grunde geſchiehet und ich nur die Gelegenheit dazu gegeben habe. Ich wende mich nunmehr zu dem, was ich von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken zu ſagen habe:

Die Bergleute brauchen das Wort Bauen in mancherley Bedeutung. Wenn ſie Bergwerk überhaupt betreiben, ſo heißet es bey ihnen, Bergwerk bauen; dahin rechnen ſie alſo alle Bergwerksgeſchäfte, die ſowohl über, als unter der Erde zum Bergwerk gehören; beſonders aber bauen ſie über der Erde, oder am Tage, wenn ſie Huth- oder Zechenhäuſer, Kauen, Göpel, Waſſerkünſte, Pochwerke, Erztwäſchen, Schmelzhütten, Schmelzöfen, Waſſerläufe, Reiche und dergleichen aufrichten und anlegen. Ferner bauen ſie unter der Erde, dieſes geſchiehet auf zweyerley Weiſe:

Erſtlich, wenn ſie die Erd- und Steinlagen eines Gebürges nach ihrer Abſicht mit Röſchen, Schürfen, Stollen, Schächten, Strecken, Geſenken, Schlöthen oder Ueberſichbrechen, Hornſtädten, Querſchlägen, Flügel Oertern vermittelſt ihrer Bergwerkzeuge, als Schlägel, Eiſen, Bohrer, Keilhauen, Kratzen, Keilen, ꝛc. durchbrechen.

Zweytens, wenn ſie das lockere, loſe Geſtein, ſo klüftig iſt, oder Erde, Sand, Kieß, Gerölle unter der Erde mit Zimmer- oder Mauerwerk verwahren und vor dem Einſturz ſicher ſtellen, Waſſerkünſte daſelbſt errichten, Fahrten in die Schächte, Geſenke und Schlöthhengen, Bühnen, Kaſten und Spreitzen ſchlagen, Trageſtempel, Einſtriche und Stege legen, Thürſtöcke ſetzen, die ſich gezogenen und abgelöſeten Steinfelſen und Wände mit Holz und Steinen unterſchlagen, oder unterwölben, daß ſie ſtehen bleiben, nicht ſtürzen, und dergleichen mehr.

Dieſe letztern Geſchäfte gehören zwar alle zu dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken; allein ich würde zu weit von meinem Zwecke abkommen, wenn ich von allem handeln wollte. Ich habe mir vorgeſetzt, nur das, was eigentlich den Bau durch die Erd- und Steinlagen, und die Verwahrung derſelben vor dem Einſturz angehet, in Betrachtung zu ziehen, das übrige aber den Steigern und Zimmerlingen zu überlaſſen.

Ich ſetze voraus, daß das Gebürge, in welchem ein unterirdiſcher Bau angeſtellet werden ſoll, mit Erzgängen, oder Minerallagern geſegnet ſey, ſo entweder ſchon entdeckt, oder vermittelſt gewiſſer Anzeigen vermuthlich in demſelben vorhanden ſind.

In meiner bergmänniſchen Erdbeſchreibung in dem 2ten Bande der churfürſtlich-baieriſch-akademiſchen Abhandlungen habe ich gezeiget, daß die ganze Erde ein Flötz ſey, die Berge und Hügel aber nur als von unterirdiſchen Bewegungen, oder andern Urſachen verurſachte Abweichungen zu betrachten wären, da verſchiedene Flötzlagen von ſolchen Bewegungen entweder gehoben, und aus einer ſchwebenden faſt wagerechten in eine ſteilere und bisweilen gar ſenkrechte Stellung gebracht, oder manche Hügel und Berge durch Waſſerfluthen aufgeſetzt worden. Der unterirdiſche Bau bey Bergwerken wird alſo entweder in faſt wagerecht-liegenden, oder in erhobenen Erd- und Steinlagen angeſtellet werden können. Hieraus ergeben ſich zween Gegenſtände; der eine betrift den unterirdiſchen Bau bey Bergwerken in faſt wagerecht liegenden, der andere in erhobenen Erd- und Steinlagen. Bey beyden muß darauf gedacht werden, wie der Bau nicht allein auf die kürzeſte und vortheilhafteſte Art anzuſtellen, ſondern auch dieſem Baue Feſtigkeit und Dauer, ſowohl zum Fortbaue, als zur Sicherheit für das Leben der Aufſeher und Arbeiter zu verſchaffen ſey.

Weil die faſt wagerecht liegenden ſowohl als die erhobenen Erd- und Steinlagen, indem ſie ſich mit ihren Erz- und Minerallagern oder Gängen insgemein gegen zwo Weltgegenden, die erſten weniger, die andern ſtärker heben, und dieſen gegen über ſich nach der Teuffe ziehen, daſelbſt erſt recht edel zu werden anfangen, und der Bergmann im Gebürge jederzeit mit zween Hauptfeinden, nämlich mit Waſſersnoth und böſen Wettern oder mit erſtickender Luft zu kämpfen hat: ſo muß er mit dem anzuſtellenden unterirdiſchen Baue gleich im Anfange nach der Teuffe trachten, und darauf bedacht ſeyn, wie er die Erzteuffe erlange, und ſeinen Feinden, wenn ſie ſich einſtellen ſollten, entgegen gehen und ſie aus dem Wege räumen möge, damit er ungehindert fortbauen könne.

Die beſten Mittel hiezu ſind Röſchen, Stollen, Sümpfe, Waſſerkünſte, und Durchſchläge, welche den Ablauf der Wäſſer befördern, und einen guten Luftwechſel verſchaffen; die ſogenannten Waſſerſeigen bey Röſchen und Stollen, in Schächten und Geſenken in das Geſteine gleich mit einzuhauende und hernach zu verdeckende Schräme, über oder neben einander anzuſetzende und in das Gebürge zu treibende Oerter und Strecken, da aus einer in die andere durchgeſchlagen werden kann, gehören hauptſächlich hieher.

Wie vermittelſt der Waſſerkünſte die Wäſſer aus den unterirdiſchen Bergwerksgebäuden, der Wettermaſchinen und des

Feuers der Luftzug daſelbſt zubewirken ſey, findet man in den Bergwerks- und Maſchinenbüchern.

Der Anfang eines unterirdiſchen Bergbaues ſowohl in flachliegenden- als gehobenen Erd- und Steinlagen eines Gebürges wird entweder mit wagerrechter, flacher, oder ſenkrechter Durchbrechung derſelben gemacht; alle drey Arten der Durchbrechung haben ihren Grund, warum ſie ſo geſchehen.

Die wagerechte Durchbrechung der Erd- und Steinlagen hat ſonderlich die Waſſerloſung zum Grunde, und verſchaffet, wenn man damit in ein ander Gebäude oder Oeffnung im Gebürge durchſchlagen kann, friſche Wetter; ſie begegnet alſo den beyden Hauptfeinden der Bergleute, ſie leiſtet bequeme Förderniß und vernützt weder Seil noch Kübel.

Die flache Durchbrechung hat ſonderlich auf flachen in die Teuffe fallenden Erzminerallagern und Gängen ſtatt, wenn ſie ziemlich mächtig und im Hangenden und Liegenden ihre Ablöſung oder Scheidung am Geſteine haben; es werden viele Arbeitsköſten damit erſparret, und nicht allzuflache Schächte ſind den Bergleuten zum Ein- und Ausfahren bequem.

Die ſenkrechte, oder nach der Bergſprache, die ſaigere Durchbrechung gedachter Lagen geſchiehet deßwegen, daß man deſto eher auf ein edles Erzminerallager oder Gang in die Teuffe komme, auch kürzere Bergförderniß und leichtere Verzimmerung oder Verwahrung des Geſteines gegen den Einſturz habe.

Jede dieſer Durchbrechungsarten hat aber auch ihre Ungemächlichkeiten:

Die wagrechte Durchbrechung gedachter Lagen, wenn ſie weit in das Gebürge getrieben werden muß, verurſachet, ſowohl im rolligen, als feſten Gebürge, langweilige, beſchwerliche und koſtbare Bergförderniß und Arbeit, ſie erfordert öfters viel Holz, Bretterwerk und Zimmerung, der Wettermangel ſtellet ſich endlich ein, und iſt gleichwohl wegen der Waſſerloſung eines Gebürges die allernöthigſte.

Die flache Durchbrechung verurſachet beſchwerliche Förderniß, koſtet, wenn das hangende Geſtein nicht feſt genug iſt, viel Zimmerung oder Mauerung, und wird, wenn ſie gar zu flach iſt, im Ein- und Ausfahren zu beſchwerlich, vernützet auch viel Seil, Kübel, Holz und Bretterwerk.

Die ſenkrechte Durchbrechung wird dem Bergmanne im Ein- und Ausfahren beſchwerlich, bey der Arbeit in faſt ebenliegenden Steinlagen oder ſogenannten Flötzgeſteine ſauer, koſtet viel Zeit und Geld, der Wettermangel ſtellet ſich bald ein, die Berg- und Erzförderniß koſtet viel Seil, Kübel und Schmiere, wie auch noch über dieß im rolligen und klüftigen Geſteine viel Zimmerung oder Mauerung.

Die wagrechten Durchbrechungen nennet man Röſchen, Stollen, Strecken, Querſchläge, Flügelörter, Schieferfahrten; ſie werden auch ſöhlige Durchbrechungen genannt.

Die flachen donnlegigen Durchbrechungen heißet man flache, die ſenkrechten oder ſaigern aber ſaigere Schächte, Schürfe, Geſenke, Schlöthe oder Ueberſichbrechen.

Bey Erwählung einer dieſer Durchbrechungsarten zum vorzunehmenden unterirdiſchen Bergbaue iſt es nicht gleichgültig, mit welcher der Bauende den Anfang machen will, ſondern er muß erſt auf die Lage des ganzen Gebürges, und denn auf die Lage ſeines Geſteines ſehen, das er zu bearbeiten hat, ſo wird er urtheilen können, mit welcher Art der Durchbrechung deſſelben am füglichſten der Anfang zu machen ſey.

Iſt das Gebürge, worinn gebauet werden ſoll, ſehr ſänftig, und wenig erhoben, wie die faſt wagerecht liegenden, oder ſogenannten Flötzgebürge ſind, ſo iſt es oft ſchwer, ſo viel Teuffe in der Nähe zu finden, wo man mit einem Stollen ankommen, und das Gebürge damit aufſchließen, folglich von den Wäſſern befreyen kann.

In dergleichen Gebürgen behilft man ſich im Anfange mit Such- und Tageröſchen, theils nur die Tagewaſſer, ſo bey Regen- und Thauwetter einfallen, bald abzuführen, ehe ſie ſich in mehrere Teuffe ſenken, theils auch Erz- und Minerallager, Gänge, nur in einiger Teuffe auf- und zu unterſuchen, zu ſehen, ob ſie weiter in die Teuffe ſetzen, und werth ſind, daß man Schächte darauf abſinke, und endlich bey ſich zeigenden Grundwäſſern Waſſerkünſte, wenn Aufſchlagewaſſer vorhanden, oder, weil man dieſe nicht allemal antrift, dieſe Wäſſer durch Menſchen oder Thiere vermittelſt ſogenannter Göpel, oder Treibekünſte aus der Teuffe ziehen und zu Tage aufbringen laſſe.

Es kömmt, ſonderlich in den ſänftigen Gebürgen, ſehr viel darauf an, wie die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe gehet, die ich vor allen Dingen erforſchen muß, wenn die Frage iſt, wie dem Erz- oder Minerallager, Gange, am beſten, kürzeſten und doch in möglichſter Teuffe bey zu kommen ſey.

Lieget das Erz- oder Minerallager, als Vitriol-Kieß Farben-Erden, Porcelain-Erden, Eiſenſtein, Alaun-Erde oder Alaun-Schiefer, Steinkohlen, braune Holzkohlen, Torf, Marmor, und andere zum bauen dienliche Steine bald unter der Damerde, oder nicht allzutief darunter, ſo werden ſie, nachdem ſie weggenommen worden, gleich vom Tage hineingewonnen, oder man macht verſchiedene runde und nicht allzuweite Gruben neben einander nieder, flechtet ſie mit Knütel und Reißholze aus, wozu das junge Eichenholz das beſte iſt, und nimmt Erz, Mineral, Eiſenſtein ꝛc. um ſich herum, ſo lange es ohne Gefahr des Einſturzes des Gebürges geſchehen kann, mit Behutſamkeit hinweg. Liegen aber dieſe Dinge ſonderlich Erz- und Mineralien in ziemlicher Teuffe, ſo muß man beym Anfange des unterirdiſchen Bergbaues ganz anders zu Werke gehen, und ſowohl bey flachliegenden, als erhobenen Gebürgen und ihren in ſich habenden Erd- und Steinlagen auf Röſchen, Stollen, und tiefere Schächte bedacht ſeyn, die Erz- und Minerallager zu entdecken, und das gewonnene durch ſie an den Tag zu bringen.

Habe ich die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe, ſowohl bey flachliegenden, als erhobenen durch ſchürffen und einſchlagen in die Damerde, oder in Waſſerriſſen, Schlüchten ꝛc. entdeckt, ſo kömmt auch endlich das durch Fluthen und Wind aufgeſetzte Tagegebürge in Betrachtung. In Gebürgen, deren Steinlagen unter der Erde flach liegen, kann man öfters ſchon aus ihrer Oberfläche dieſe Lage gewahr werden, und von dieſer auf jene ſchließen, als: Ich ſehe, die Oberfläche der aufgeſetzten Damerde des Gebürges ſenket ſich nach und nach gegen Mittag und Abend, ſo kann ich hieraus ſchließen, daß des Gebürges unterirdiſche Stein- Erz- und Minerallager in den allermeiſten Fällen ſich eben ſo ſenken, ob ich gleich nicht läugnen will, daß es auch einige Ausnahme geben könne, die aber bey einiger Aufmerkſamkeit bald zu entdecken ſeyn werden. Habe ich hingegen da, wo die Stein-Erz- oder Minerallagen zu Tage ausſtreichen, einen Hügel, Berg vor mir, und dieſe Lagen fallen oder ſtrecken ſich gegen denſelben in die Teuffe, ſo habe ich zu betrachten, ob der Hügel, Berg entweder auf der anderen Seite jähe und bald abfällt, oder ob er auf eine ſehr lange Strecke ganz ſänftig, flach lieget und ſeine Oberfläche ſich mit der daranſtoſſenden eines andern ſänftigen Hügels, Berges vereiniget. In dem erſten Falle iſt es rathſam, ſich mit dem Baue auf der jähe abfallenden Seite einzulegen, und einen Stollen in das Hangende des Hügels, Berges anzuſetzen, weil da die Erd- und Steinlagen mit ihren Erzen und Mineralien der StollenArbeit zufallen, und die Wäſſer, ſo aus den Klüften zugehen, deſto leichter abgeführet werden können. In dem andern Falle iſt es ſchwer, dem Erz- oder Minerallager im Hangenden beyzukommen, weil nur mit Schächten, aber nicht leicht mit Stollen anzukommen iſt, indem vor ſelbigen kein Thal, und daher keine genugſame Teuffe in der Nähe erlangt werden kann; die Schächte aber, da die Steinlagen einſtürzen, ſind meiſtentheils ſehr tief abzuſinken, wobey bald matte Wetter und Waſſersnoth dem Baue die größte Hinderniß in den Weg legen, auch wohl gar das Niederbringen ſolcher Schächte bis auf das Erz- oder Minerallager unmöglich machen.

Es ereignet ſich öfters, daß am Ausgegenden der Erd- und Steinlagen eines ſolchen Hügels, Berges, alſo in deſſen liegenden ein Thal iſt, wo allenfalls ein Stollen angeſetzt werden kann, wenn die Steinlagen mit ihrem Erz- oder Minerallager jähe einſtürzen, ſonſt iſt der Weg mit einem Stollen oder Röſche durch das liegende Geſtein gemeiniglich zu weit, weil die Steinlagen mit ihren zwiſchen ſich habenden Erz- und Minerallagern der Stollenarbeit ſo lange entfallen, als dieſelben mit ihrer Neigungslinie die innere wagerechte oder ſöhlige Linie des Stollens nicht ſobald durchſchneiden. Bisweilen iſt das Lager der Erd und Steinlagen nach der Länge ihres Fallens durch eine Schlucht oder Thal zerriſſen, welches die beſte Gelegenheit giebt, das Erz- oder Minerallager zwiſchen ihnen bald zu entdecken, und wagerecht oder ſöhlig mit einer Röſche, Stollen daran aufzufahren. Liegen die Erd- und Steinlagen aber flach, ſo treibe man die Röſche, Stollen, Strecke dennoch aufrecht in das Gebürge, und laſſe ſich nicht verleiten, dieſelben wegen guter Ablöſung der Steinlagen, einer von der andern, nach ihrer flachen Lage ins Gebürge zu treiben; denn die Förderung der Erze, Mineralien und Berge würde nicht allein beſchwerlich, ſondern auch wegen der in dieſem Falle nöthigen Verzimmerung des Hangenden, wenn es nicht ganz iſt und vor ſich ſelbſt ſtehet, unmöglich, und der Bau ſehr koſtbar werden.

Eben dieſes kann auch von einem ſehr flachfallenden Gange, ſowohl in faſt wagerecht liegenden, als in erhobenen Gebürgen gelten, der aber die noch flächer liegenden Steinlagen derſelben durchſchneidet, wenn auf ihn ein unterirdiſcher Bau vorgerichtet werden ſoll. In hohen und ſteilen Gebürgen findet man ebenfalls Erz- und Minerallager, und man kann vielen derſelben die Bauwürdigkeit nicht abſprechen, ob es gleich allemal auch wahr bleibet, daß der unterirdiſche Bergbau in ſolchen Gebürgen ſchwer und koſtbar wird, da vielmal den Erzgängen und Minerallagern nicht anders, als mit doppelten Stollen unter über, oder nebeneinander, welche des Wetterwechſels wegen oft mit einander durchſchlägig gemacht werden müſſen, beyzukommen iſt, und man die

Gedanken, Schächte auf ſelbige abzuſenken, fahren laſſen muß, auch nächſt dieſem die Ausfuhr der Erze ſehr mühſam und gefährlich für den Fuhrmann und ſein Geſchirre iſt.

Dieſes bisher angeführte vorausgeſetzt wende ich mich nunmehr zu den oben erwähnten Gegenſtänden des unterirdiſchen Baues bey Bergwerken.

Von dem unterirdiſchen Bergbaue in faſt wagerecht, oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

In Gebürgen, deren Erd- und Steinlagen faſt wagerecht, oder ſchwebend, liegen, trift man Erz- und Mineral ſowohl in und zwiſchen dieſen ihren Lagen, als auch in Gängen an, welche letztern durch die ſchwebenden Lagen ſenkrecht oder auch flach durchſetzen. Bey den ſchwebenden Steinlagen wird der unterirdiſche Bau wegen ihrer Lage etwas anders als an den Gängen geführet, ſo die ſchwebend liegenden Lagen durchſchneiden.

Ich will den Bau zwiſchen den ſchwebend liegenden Lagen zuerſt vornehmen, und hernach von den dieſe Lagen durchſchneidenden Gängen einen Begriff zu machen ſuchen; den Bau auf dieſen aber im folgenden Abſchnitte zugleich mit angeben.

Da die Gebürge und ihre Erd- und Steinlagen, woraus ſie beſtehen, ſie mögen ſchwebend oder erhoben liegen, ſich jederzeit nach zwoen Gegenden vom Horizonte erheben und nach zwoen über liegenden ſich neigen; ſo muß man gleich zu Anfange ihres unterirdiſchen Baues ſich dieſe Beſchaffenheit zu Nutze machen, und wegen Abführung der Waſſer, welche ſonderlich in den Gebürgen ſchwebend liegender Lagen reichlich vorhanden ſind, das Gebürge und ſeine Lagen da angreifen, wo ſie ſich hinneigen, das iſt, man muß ſich in ihr Hangendes mit der Bergarbeit legen, und daſelbſt, wenn ein Thal vorhanden, mit einem Stollen oder wagerechter Durchbrechung den Anfang machen, von daraus aber die ganze Bergarbeit gegen das Liegende, oder nach der Gegend treiben, wohin ſich das Gebürge mit ſeinen Erd- und Steinlagen hebet, ſo fallen die Waſſerköſten, welche ſonſt bey dem Bergbaue eine der beträchtlichſten Ausgaben machen, hinweg; denn man kann ſein Erzminerallager ſo zu ſagen Staffelweiſe ohne Hinderniß abbauen, und die Waſſer hinter ſich weglaufen laſſen.

Die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen müſſen auf die kürzeſte, bequemſte und vortheilhafteſte Weiſe vorgenommen werden; man muß ſich daher allemal, ſo viel wegen Abführung der Wäſſer möglich iſt, den kürzeſten Weg nach dem Erz- oder Minerallager des Gebürges wählen, ſie mögen zwiſchen den ſchwebenden Steinlagen, oder als ganze Stöcke im Gebürge liegen. Der allerkürzeſte Weg aber gehet nach einer geraden Linie, und iſt bey einerley Geſteine der wohlfeileſte bey der Arbeit. Dieſe Linie muß man alſo, ſo viel nur immer möglich iſt, bey allen Durchbrechungen des Gebürges oder deſſen Geſteins, ſie mögen wagerecht, flach, oder ſenkrecht geſchehen, vor Augen haben; bey Bergwerken beſtimmt die Markſcheidekunſt dieſe gerade Linie; die Durchbrechung harter Steinlagen und Felſen iſt eine ohnehin ſehr koſtbare Arbeit, man muß ſie durch krumme Wege nicht noch koſtbarer machen.

Bey vielen Bergwerken ſcheuet man ſich zwar nicht, bey faſt jedem vorfallenden feſten Geſteine auszuweichen, und die Arbeit in Gebrecheres zu treiben, unter dem Vorwande, Zeit und Koſten zu erſparen. Der Vorwand aber tauget nichts; man kömmt weder wohlfeiler noch hurtiger davon; denn die Zimmerung oder Mauerung, ſo bey dergleichen gebrechern Gebürge hernach zum öftern nöthig iſt, vereitelt beyde Abſichten, und man behält über kurz oder lang ein baufälliges Berggebäude. Ich behaupte im Gegentheil, daß es Fälle giebt, wo man gezwungen iſt, ſich aus dem gebrechen Geſteine in ein feſtes zu wenden, wenn das Gebäude dauerhaft ſeyn ſoll, wo hernach weder Zimmerung und Mauerung nöthig iſt, noch Brüche entſtehen können.

Der andere Fall, wo von der wagerechten und ſenkrechten geraden Linie währender Arbeit abgewichen werden kann, iſt, wenn an einem edeln Erz- oder Minerallager, das nicht immer in einer geraden Linie fortſtreicht, oder ſich in die Teuffe ſenkt, entweder mit einem Stollen, oder Streckenorte aufgefahren, oder Schächte, Geſenke darauf abgeſunken werden; denn da iſt die Gewinnung des Erzes und Minerals das Hauptwerk, und der Bergmann gehet ihm nach, es mag ſtreichen, oder ſich ſenken, wie und wohin es will; man ſcheue keine tauben Mittel; denn es iſt nicht leicht ein Erzminerallager durchgängig edel, ſondern ſie werden bisweilen von dem Geſteine auf verſchiedene Weiſe verdrückt, durch andere Steinwände verſchoben, abgeſchnitten, ſie richten ſich aber auch wieder ein, und beweiſen ſich hernach eben ſo edel, wie zuvor, ob es gleich auch bisweilen Fälle giebt, daß ſie von andern zufallenden Geſteine ganz und gar abgeſchnitten oder verdrückt werden, und ſich bey Verfolg der Arbeit nicht wieder zeigen.

Die Bequemlichkeit der Arbeiter, die Förderung der Berge Erze, Mineralien und die mögliche Erſparung der Köſten erfordern, daß die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen in gehöriger Höhe und Weite geſchehen. Daher haben ſie ihr Maaß; dieſes richtet ſich noch überdieß nach gewiſſen Abſichten, die man bey dieſem oder jenem anzuſtellenden unterirdiſchen Bergbaue hat.

Einer kurzen Tageröſche, wodurch nur die Tage- oder einfallenden obern Thau- und Regenwäſſer abgeleitet, der Arbeit bey abzuſinkenden Schürffen und Schächten Wetter oder friſcher Luftzug eingebracht, und das Erzminerllager aufgeſucht werden ſoll, giebt man 5 bis 6 Fuß Höhe und 2 Fuß Weite, auch wohl etwas mehr; iſt ſie aber hundert und mehr Lachter zu treiben, ſo muß ſie einzuführender friſcher Wetter wegen höher werden, ſie wird alsdenn einen Stollen im Maaße ähnlicher.

Ein Stollen der mit der Zeit mehr als ein unterirdiſches Bergwerksgebäude löſen, ihre Wäſſer einnehmen und abführen ſoll, muß ordentlicher Weiſe 7 bis 8 Fuß hoch und bis 3 Fuß weit ſeyn; ſoll er aber die Wäſſer eines ganzen Zuges von Gebürgen und Zechen löſen, ſo muß er noch höher und weiter zu hauen angefangen werden.

Auf ſchwebend liegenden Erz- und Minerallagern, Kupfer- Alaun- Schiefern richtet man ſogenannte Fahrten vor, welche Art der Durchbrechung vielmal kaum 18 bis 20 Zoll hoch, und 4 Fuß weit fort gehauen, und die Erze, Mineralien, edle Schiefer mühſam weggenommen und zu Tage aufgebracht werden. Sind die Erz- und Minerallager höher und mächtiger, ſo treibt man Strecken neben- und durcheinander, daß alle 1 oder 2 Lachter ein Pfei-

ler

ſer oder ſogenannte Bergfeſte von 1 oder 2 Quadratlachtern ſtehen bleibet und das Tach unterſtützet, daß es nicht einſtürze; bey der Schieferarbeit wird das Tach, wo die Schiefer weggehauen werden, mit tauben Schieferwänden, die keinen Gehalt haben, unterſchlagen. Wo aber vor dem ſogenannten Strebe, oder ganzen Schiefergeſteine, gearbeitet wird, und das Tach nicht allzu gut iſt, ſetzen die Schieferhäuer kleine hölzerne Bolzen zu ihrer Sicherheit unter. Bey der Schieferarbeit wird insgemein eine Fahrt immer in gerader Linie, bequemer Förderung wegen, in das Feld fortgehauen, und neben dieſer zur beyden Seiten andere Fahrten meiſt nach einer ſchrägen Linie angeſetzt, und mit der erſten dergeſtalt fortgetrieben, damit man beſtändig ein fein breites auszuhendes Strebe vor ſich habe, wie die I. Fig. anzeiget, in welcher *a.* die gerade fortgetriebene, und *b.* die Nebenfahrten, *c* aber das Strebe, oder noch nicht durchbrochene Schiefergeſtein iſt.

Einen Schacht, der auf ein Erz- oder Minerallager abgeſunken und nicht tiefer, als etliche 20 bis 30 Lachter nieder gebracht wird, macht man in der Länge 8 — 9. und in der Breite 3 Fuß, wenn zugleich ein Fahrſchacht dabey ſeyn ſoll; ſonſt muß er je tiefer, je länger werden, damit der Rundbaum auch länger werde, und zur Aufwickelung des Schachtſeils Platz genug darauf ſey.

Wenn die ſchwebend aufeinander liegenden Erd- und Steinlagen flach, oder ſenkrecht nach der Teuffe zu von einander geriſſen, und dieſer Riß mit Quarten, Spath und Erz, oder mit ſonſt einer Gangart und Mineral ausgefüllet iſt, ſo heißet dieſer Riß ein Gang; ſind aber auf der einen Seite die von einander geriſſenen oder geborſtenen Erd- und Steinlagen geſunken und auf der andern Seite ſtehen geblieben, ſo, daß nunmehr nicht Damerde gegen Damerde, Sand gegen Sand, Kalkſtein gegen Kalkſtein, Zechſtein gegen Zechſtein, und Schiefer gegen Schiefer über liegen, ſondern Damerde gegen Sand, dieſer gegen Kalkſtein, dieſer gegen Zechſtein und ſo fort, oder wohl gar Damerde dem Kalkſteine und Sand dem Zechſteine gegen über liegen, ſo heißen dieſe Riße oder Gänge, Wechſelrücken, weil da, bey dem Niederſinken, die Erd- und Steinlagen nicht einander gerade über ſtehen geblieben, ſondern gewechſelt haben; nach dem bergmänniſchen Sprachgebrauche ſagt man, das Flötz ſey auf der einen Seite in die Höhe, und auf der andern Seite in die Teuffe geſprungen, daher jenes das obere Flötz, dieſes das untere genannt wird; das Wort Flötz aber deutet bey manchen Bergwerken entweder alle über einander ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen, oder auch wohl nur eine an, welche vorzüglich vor den andern das Flötz genannt wird.

Dieſe angegebenen Durchbrechungen geſchehen auf die vortheilhafteſte Weiſe, wenn ſie von geſchickten Aufſehern veranſtaltet, und eben dergleichen Bergleuten mit tüchtigen Gehähe und Werkzeugen ordentlich verrichtet werden.

Von dem unterirdiſchen Bergbaue in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Der Anfang des Baues wird in erhobenen Erd- und Steinlagen eben ſo, wie in den faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden mit Röſchen, Stollen oder Schächten und Schürfen gemacht. Weil aber in den erhobenen Erd- und Steinlagen die Erze und Mineralien nicht wagerecht, ſchwebend oder zu breitem Blicke, wie der Bergmann ſpricht, liegen, ſondern Gangweiſe brechen, das iſt, ſo zwiſchen dem Geſteine enthalten ſind, daß ſie entweder in flachen, oder ſenkrechten durch das Geſtein geſchehenen Riſſen liegen, ſo geſchiehet die Durchbrechung der Gänge in dieſen erhobenen Steinlagen etwas anders, als die Durchbrechung der Erz- und Minerallager in ſchwebenden Erd- und Steinlagen. Es wird nämlich, wenn der Gang in einem tiefen Thale zu Tage ausſtreichet, am ſelbigen entweder gleich mit einem Stollen aufgefahren, oder man iſt aus Mangel eines ſolchen Thales gezwungen, den Stollen auf einer andern Seite des Gebürges, wo genugſame Teuffe und gute Gelegenheit vorhanden, anzuſetzen; wo aber auch dieſes fehlet, werden auf der Oberfläche des Gebürges Schächte gleich auf dem Gange entweder ſenkrecht oder flach, nachdem die Lage oder Richtung des Ganges in die Teuffe beſchaffen iſt, abgeſunken, oder dieſelbe werden dem Gange zur Seite geſetzt; dieſes kann ſowohl im Hangenden als Liegenden des Ganges geſchehen. Iſt das Hangende feſte und gut, ſo ſetzt man den Schacht in daſſelbe in einer ſolchen Entfernung vom Gange, daß man mit ſaigerer Abſinkung deſſelben in einer gewiſſen Teuffe auf ihn treffe; vermuthet man aber, das hangende Geſtein möchte zu klüftig ſeyn, und viel Zimmerung oder Mauerung erfordern, ſo wird der Schacht im Liegenden ſenkrecht nieder getrieben, und der Gang in der Teuffe mit einem Querſchlage, nach dem Hangenden zu, aufgeſucht.

Ich will eine Durchbrechungsart nach der andern vornehmen. Kann man an einem in einem tiefen Thale ausgehenden Gange, welches aber ein ſeltener Fall iſt, gleich Röſchen- oder Stollenweiſe auffahren, ſo wird an Zeit und Koſten viel gewonnen; denn hier läßt ſich gleich ein vortheilhafter Bau, bald Erz zu gewinnen, vorrichten. Man kann, ſo bald der Gang ſich edel zu erweiſen anfänget, entweder überſich brechen, ſodann Firſtenarbeit anlegen, und das im Gange befindliche, meiſt mit Bergen, Spath, Quarz vermiſchte Erz Stroſſenweiſe überſich weghauen, oder mit Sprengen gewinnen, die Erze von den Bergen aushalten, die Berge aber auch auf die unter ſich zuſchlagenden Käſten ſtürzen, und, die daſelbſt nicht Platz genug haben, mit den Erzen zu Tage ausfördern; oder man bricht überſich, länget ins Feld aus, hauet die Erze und Berge Stroſſenweiſe mit der Stollenſohle fort, ſchlägt Käſten hinter ſich zurück in gewiſſen Höhen über einander, bringt die Berge darauf, und benimmt dadurch dem ausgehauenen Gebäude die Gelegenheit einzuſtürzen; ſolchergeſtalt fährt man immer ſo lange mit dem Baue am Gange fort, als dieſer das Feld einnimmt und edel iſt.

Setzet der Gang mit Erzen unter den Stollen nieder, ſo wird aus dieſen in etwas auf die Seite, und eine ſogenannte Hornſtadt gebrochen, den Haſpel dahin zuſtellen, alsdann abgeteufft, bey dem Abteuffen aber der Bau wegen Zugänge der Wäſſer, ſo entweder mit Handpumpen oder andern Waſſerkünſten müſſen gewältiget werden, ſchwerköſtiger; wird aber, wenn man ſo tief abgeſunken, als man gekönnt, in der Teuffe eben ſo, wie über dem Stollen, wenn auf der Sohle des Geſenkes wieder an den Gang gebrochen wird, ins Feld, durch Auffahren oder Auslängen ins Feld, wie auch vorrichten der Firſten- oder Stroſſenarbeit fortgeführet, doch ſo, daß zwiſchen dieſem Gebäude und der Stollenſohle ein ſtarkes Mittel vom Gange ſtehen bleibe, auf welchen die Stollen Wäſſer zu Tage auslaufen mögen; wollte man aber zuletzt auch dieſes Mittel, wenn es edel iſt, wegnehmen, ſo müßten zu Abführung der Stollen Wäſſer Schräme ins Liegende des Ganges zuvor gehauen werden.

Iſt kein Thal vorhanden, wo man gleich auf dem Gange mit einem Stollen anſitzen kann, ſo wird andere Gelegenheit geſucht, wo am tiefeſten mit einem Stollen anzukommen ſeyn möchte, einen oder mehrere Gänge damit zu überfahren und aufzuſuchen.

Streichen die Gänge gleichlaufend oder meiſtentheils in einerley Richtung neben einander durch das Gebürge, ſo wird der Stollen vornehmlich ins Hangende, oder wenn da nicht, ſondern beſſer im Liegenden anzukommen iſt, in das Liegende getrieben, und hernach, wenn an den überfahrnen Gängen zu beyden Seiten des Stollens ausgelänget worden, wie ich bereits erwähnet habe, an jedem Gange gehörig abgebauet; halten die Gänge in einem Gebürge nicht einerley Streichen, ſondern fallen durch einander her, ſo gilt es gleich, wo und auf welcher Seite man den Stollen anſetzen will; es iſt nicht genug, wenn es in möglichſter Teuffe geſchiehet, und dabey, wo möglich, der kürzeſte Weg gewählet wird; in dieſem Falle geſchiehet der Bau vom Stollen aus, wie in dem vorigen.

Wollte man aus verſchiedenen durch einander herſetzenden Gängen ſich den vermuthlich edelſten zu bauen erwählen, ſo iſt natürlich, daß man dieſem mit dem anzuſetzenden Stollen auf dem kürzeſten Wege und in möglichſter Teuffe beyzukommen ſuchen müſſe.

Wenn die Stollen weit in das Feld zu treiben ſind, ehe ſie auf die Gänge treffen, ſo iſt es vielmal wegen kürzerer Förderniß, und zu verſchaffender friſchen Wetter nöthig, unterweges Schächte auf die Stollen abzuſinken, ſo bey Bergwerken Lichtlöcher genannt werden.

Kann man, ſonderlich in ſehr ſänftigen Gebürgen, nirgends mit einem Stollen ankommen, ſo werden Schächte, wenn Hangendes und Liegendes gut, gleich auf dem Gange abgeſunken, oder ſie werden in deſſen Hangendes oder Liegendes geſetzt.

Feſte Schächte zubekommen, die keinen ſo öftern Brüchen unterworfen ſind, erwählet man lieber das Liegende, und bricht hernach von der Sohle des Schachtes mit einem Querſchlage ſeitswärts an den Gang, anſtatt, daß, wenn der Schacht in das Hangende geſetzt wird, er endlich in der Teuffe auf den Gang ſelbſt treffen muß.

Werden die Schächte auf den Gängen ſelbſt abgeſunken, ſo geſchiehet es nach dem Fallen derſelben in die Teuffe, das iſt, entweder ſenkrecht oder flach, ſonſt aber allemal ſenkrecht, weil dieſes der kürzeſte Weg iſt, in die Teuffe zukommen; bey dieſer Bauart müſſen die Wäſſer gemeiniglich mit Waſſerkünſten gehalten werden; der Bau ſelbſt aber wird an den edeln Gängen eben ſo, wie ſchon gemeldet, geführet.

An den Gängen ſelbſt, woran gebauet werden ſoll, wird, ſo viel möglich zu beyden Seiten ausgelänget, und die Arbeit in des Ganges Feld Strecken- Firſten- oder Stroſſenweiſe fortgebracht; das erſtere geſchiehet durch Anſetzung und Fortreibung der Oerter, das zweyte durch ſtaffelweiſe Forthauung der Firſten, das dritte durch Anlegung und Nachreißung der Stroſſen.

Zu einer Ortshöhe werden insgemein 5 Fuß, und zur Breite 2 Fuß genommen, wenn der Gang ſchmal iſt; iſt er mächtig und ſein Gebürge feſte und gut; ſo werden die Erze und darzwiſchen liegenden Berge breiter und höher weggenommen, auch, wie ich oben bereits gemeldet, Stroſſen angelegt und nachgeriſſen, mit den Bergen aber das Hangende, an welchem mit dieſer Durchbrechung der Anfang zu machen iſt, unterbauet, damit es in Ruhe komme, und keine ſich mit der Zeit losziehenden Wände hereinfallen, oder das Gebürge einen Bruch machen könne. Alſo treibet man an ſehr mächtigen Gängen eine Strecke neben der andern gegen das Hangende auf einige Lachter, auch wohl, wenn es nöthig iſt, mit darzwiſchen ſtehen gelaſſenen Bergfeſten, dem Streichen des Ganges nach, in das Feld fort, ſo lange noch Erz am Gange vorhanden, oder hinter vorfallenden tauben Mitteln wieder zu vermuthen iſt, indem immer die ausgehauenen Strecken ſeitwärts mit den Bergen der neu angefangenen verſetzt werden, und durch die neue die Förderung geſchiehet.

Querſchläge, wenn ſie nicht weit zu treiben ſind, bekommen nur die Höhe und Weite der ordentlichen Strecken. Sie haben in ſolchen unterirdiſchen Bergwerksgebäuden ſtatt, wo mehr als ein Gang neben dem andern liegt, ſonderlich in den Gebürgen der faſt wagerecht, oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen, da man ſie auch Wechſel zu nennen pfleget; dieſe Querſchläge werden rechtwinklicht aus dem einen Gange gegen den andern angeſetzt, und wenn ſie weit zu treiben ſind, müſſen ſie höher ausgehauen werden.

Flügelörter weichen nur darinne von den Querſchlägen ab, daß ſie entweder aus einem Stollen nach einem ſeitwärts liegenden andern edeln Gebürge, oder Waſſer nöthigen Zeche ꝛc. meiſt nach einer ſchrägen Linie mit Beybehaltung der Stollen-Höhe und Weite, oder aus den Gängen an den von ihnen ab und in das Gebürge ſetzenden ſtarken edeln Trümmern, oder auch der

Wetter- und Waſſerloſung wegen nach andern unterirdiſchen in der Nähe liegenden Bergwerksgebäuden getrieben werden, da ihnen denn die Streckenhöhe gegeben wird.

Alle ſowohl wagerechte, als flache und ſenkrechte Durchbrechungen bey einem unterirdiſchen Bergbaue müſſen überhaupt wegen Bequemlichkeit des Ein- und Ausfahrens der Bergleute, der Förderniß der Erze und Berge, Bringung guter Wetter in das Gebäude und Abführung der Wäſſer eine geſchickte Verbindung und Lage mit- und gegeneinander bekommen, damit allzeit der vorgeſetzte Zweck auf dem kürzeſten und bequemſten Wege durch die Oeffnung dieſer Durchbrechungen erhalten, und vermittelſt derſelben die Bergleute und Arbeiter bey aller vorfallenden Bergarbeit vortheilhaft und mit Nutzen angebracht werden können, das iſt, es muß aus einer Durchbrechung in die andere in dem ganzen Berggebäude bequem zu kommen ſeyn, und Förderung geſchehen können.

Die Röſchen, Stollen und Waſſerſtrecken müſſen ihre Lage gegen andere Strecken, Querſchläge, Flügelörter, Schächte, Geſenke, Ueberſichbrechen alſo bekommen und haben, daß ſie ihnen gute Wetter bringen und Waſſer benehmen mögen. Es müſſen daher die Sohlen der Röſchen, Stohlen, Waſſerſtrecken nicht tod gehauen, das iſt, im Gebürge nicht tiefer, als an ihrem Anfange und erſter Oeffnung, ſondern faſt wagerecht mit 1½. höchſtens 2 Zoll Fall auf 100. Lachter lang fort gehauen werden, damit die Wäſſer nicht vor Ort, ſondern vielmehr zu Tage auslaufen, und wenn durch eine Röſche, Stollen, Waſſerſtrecke zugleich gefördert werden ſoll, muß man in den erſten beyden zum Ablauf der Wäſſer Trägwerke, ſo in folgender Abtheilung vorkommen werden, ſchlagen, und in den letztern ſeitwärts Schräme auf der Sohle in dem Liegenden des Ganges 6. 8. 12. und mehr Zoll tief nach der abzuführenden Menge der Wäſſer aushauen laſſen.

Wie das feſte oder gebreche Geſtein zu durchbrechen, den Hauern verdinget, und von ihnen durchbrochen wird, wie die Erze gewonnen, zerſetzt und die Berge ausgehalten werden ſollen, gehöret zu meinem jetzigen Zwecke nicht; es können aber hierüber die alten Bergbücher nachgeſchlagen werden.

Ich ſollte hier noch den unterirdiſchen Bau in ganzen Stockwerken von Erz abhandeln. Rößler aber, der ehemals bey dem groſſen Zwitterſtocke zu Altenberg, unweit Dreßden, in Dienſten geſtanden, hat in ſeinem Bergbauſpiegel dieſen unterirdiſchen Bau hinlänglich beſchrieben, ſo, daß man ſich aus ſeiner Nachricht und aus dem beygefügten Kupferſtiche einen ziemlich deutlichen Begrif von dieſem Baue machen kann, wenn man ſich dabey vorſtellet, daß dergleichen Durchbrechungen, wie der Kupferſtich zeiget, mehr unter, über- und nebeneinander gemacht werden können, dergleichen ich in gedachtem altenburgiſchen Zwitterſtocke, der Zeichnung gemäß, ſelbſt wahrgenommen. Nur würde ich, wenn ich hier noch etwas beyfügen ſollte, zu Anlegung eines ſolchen unterirdiſchen Baues auf einem mächtigen Stockwerke, einen geſchickten Markſcheider, fürſichtigen Baumeiſter, verſtändigen Bergmeiſter und wachſamen Steiger zu gebrauchen eifrigſt empfehlen.

Hier iſt noch überhaupt zu erinnern, daß eine genaue und ordentliche Hauerarbeit in einem unterirdiſchen Berggebäude viel Vortheil und Bequemlichkeit verſchaffen könne, weswegen jederzeit ein ſcharfes Aug auf ſelbige zu haben, niemals vergeblich ſeyn dürfte; denn in reinlich und wohl ausgehauenen Durchbrechungen, iſt allerdings beym Ein- und Ausfahren ſowohl, als bey der Förderung der Erze und Berge beſſer fortzukommen, als wo hie und da noch die Felſenſtücke hervorragen und über kurz oder lang durch ihr Hereinfallen Brüche verurſachen.

Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

Das Bauen unter der Erde iſt eine Beſchäftigung für die Bergleute. Wo ſie ſich aber beſchäftigen ſollen, da müſſen ſie genugſame Sicherheit vor dem Einſturz der Felſen und für ihr Leben haben. Die Feſtigkeit und Dauer ihrer unterirdiſchen Gebäude gewähret ihnen beydes. Es iſt ihnen alſo nöthig zu wiſſen, wie einem unterirdiſchen Berggebäude in klüftigen und mürben Geſteine Feſtigkeit und Dauer gegeben werden, und wie es beſchaffen ſeyn muſſe, wenn es feſt und dauerhaft heißen ſoll. Denn feſtes Geſtein ohne Klüfte ſtehet vor ſich ſelbſt. Ein Gebäude iſt feſt, wenn die Laſt ſeiner Theile oder ſein ganzer Körper gehörig unterſtützt iſt; das aber, was eine Laſt unterſtützen ſoll, muß nich ſchwächer, als der Druck der Laſt ſeyn; es muß alſo die Stärke der Unterſtützung zu der Schwere, oder dem Drucke der Laſt die gehörige Verhältniß haben. Zur Erläuterung dieſes ſtelle man ſich einen Körper vor, der, wenn er mit ſeiner ganzen Schwere ſenkrecht auf einem wagerechten Grunde ſtehet, ruhet; entfernet ſich aber deſſen Mittelpunct der Schwere, durch eine bewegende Kraft, als durch einen Zug, Druck, an ſeinem obern Theile, indem er dadurch auf die Seite geneiget wird, ſo drückt ſeine ganze Schwere nicht mehr auf den ganzen Grund, ſondern nur auf einen Theil deſſelben. So lange dieſes geſchiehet, wird er nicht außer ſeinen Grund fallen, ſondern wenn die Directionslinie des

Mittelpuncts ſeiner Schwere auch nur noch in dem letzten Puncte der Grundfläche, auf welcher er vorher ruhete, ſenkrecht auftrift, im Gleichgewichte ſtehen bleiben. Fällt aber die ſenkrechte Directionslinie des Mittelpuncts ſeiner Schwere vollends außerhalb ſeinen Grund, ſo muß der Körper fallen; denn ſoviel ſeine Schwere bey ſeiner Neigung auf die Seite innerhalb ſeinem bisherigen Grunde abnimmt, ſo viel nimmt ſie außerhalb demſelben zu. Je nachdem nun die Schwere des ſich auf die Seite neigenden Körpers zunimmt, muß auch die Kraft, ſo die außer ſeinem vorigen Grunde zunehmende Schwere unterſtützen ſoll, zu nehmen und vermehret werden. Es wird alſo aus den Grgden des Neigungswinkels, den ein freyſtehender Körper mit der verlängerten wagerechten Linie ſeines vorhergehenden Grundes machet, und aus der zunehmenden Schwere des Körpers außer ſeinem vorigen Grunde, die Größe oder die Stärke der Kraft, ſo ihn unterſtützen ſoll, beſtimmet werden können. Im Anfange der Neigung des Körpers, und der Entfernung des Mittelpunctes ſeiner Schwere von ſeinem vorigen Grunde wird ihn eine geringe Kraft unterſtützen, weil immer noch ein Theil ſeiner Schwere über ſeinem vorigen Grunde ſchwebet, und einen gleichen Theil derſelben, ſo ſich ſchon außer den Grund geneiget, im Gleichgewicht erhält. Je mehr aber der Körper, und alſo auch ſein Schwerpunct ſich außer ſeinen Grund neiget, je mehr fällt auch vom noch über dem vorigen Grunde befindlichen Theile der Schwere, der Helfte der ganzen Schwere ſo ſich ſchon außerhalb dem vorigen Grund befindet, zu. Da nun die Schwere außerhalb dem Grunde dadurch vermehret wird, ſo muß auch die Stärke der Kraft zur Unterſtützung zunehmen.

Geſetzt, ein Körper ſey 100. tt. ſchwer, er liege überall auf ſeinem Grunde, der ihn unterſtützt, auf, ſo wird er unter einem Winkel von 90. Graden, das iſt, ſenkrecht ſeinen Grund drücken; man fange an, ihn ſeitwärts außer ſeinen Grund, worauf er ſtehet, zu bewegen, daß er mit der verlängerten Fläche dieſes Grundes einen ſchiefen Winkel von 80. Graden mache, ſo wird er nicht mehr mit ſeiner ganzen Schwere auf ſeinem vorigen Grunde drücken, ſondern es wird ſich etwas davon außer denſelben neigen; geſetzt, es wären 20. tt. je weiter der Körper auf dieſe Seite geneiget wird, je kleiner wird dieſer Winkel, und je mehr Schwere des Körpers neiget ſich mit auf die Seite; geſetzt, er mache nunmehr mit der verlängerten wagerechten Fläche ſeines vorigen Grundes einen Winkel von 45. Graden, ſo würde er vielleicht mit 50. tt. auf die Seite drücken. Im erſten Falle wird er keiner Unterſtützung bedürfen, weil ihn ſchon ſein ganzer Grund unterſtützt, worauf er ſtehet oder lieget. Im zweyten Falle muß ihn bereits eine Kraft unterſtützen, die 20. tt. Schwere tragen kann. Im dritten Falle muß ihn eine Kraft unterſtützen, die 50. tt. zu tragen vermögend iſt. Man ſiehet alſo hieraus, daß die Kraft zur Unterſtützung der 20. tt. ſchwächer ſeyn kann, als die, ſo 50. tt. unterſtützen ſoll, und daß, je kleiner der Neigungswinkel auf die Seite werde, je ſtärker die Kraft ſeyn müſſe, die den Körper unterſtützen ſoll, wie auch, daß, wenn der Körper endlich ganz auf die Seite wieder in eine wagerechte Linie zu liegen kömmt, die Kraft auch wieder ſo ſtark ſeyn müſſe, daß ſie 100. tt. die ganze Schwere des Körpers, wie ſein voriger Grund, unterſtützen könne. Weil nicht alle Bergofficianten eben Mathematikverſtändige ſind, ſo wird man mir verzeihen, daß ich dieſe Sache in der Art vorgetragen, wie ſie hier vor Augen iſt.

Könnten wir allemal die Dicke, Höhe und Schwere der gegen den Horizont geneigten und ſich von ihrem Ganzen durch ſogenannte Schlechten oder Klüfte abgelöſeten Steinwände und Felſenſtücken, in ſo ferne ſie ſelbſt keine Schlechten oder Klüfte haben, wiſſen, ſo könnten wir auch den Mittelpunct ihrer Schwere entdecken, und mit Anhaltung eines Senkbleyes deſſen Directionslinie erforſchen, auch gewahr werden, ob dieſe Linie außer oder innerhalb den Grund des Felſenſtückes, worauf es ſtehet, falle, ob daſſelbe ruhe, oder den Fall drohe, und wie ſtark im letztern Falle die Unterſtützung deſſelben ſeyn müſſe. Da wir aber nicht durch die Steinwände und Felſen ſehen, und ihre ganze Beſchaffenheit allemal weder wiſſen, noch zu entdecken vermögen, ſo können wir auch nicht jederzeit, ihre Ruhe oder Fall beurtheilen, und gegen den letztern die Stärke drr Unterſtützung beſtimmen, ob es gleich bey denen, die bereits in die Quere durchbrochen ſind, angehet, wo ich dieſe Art der Erforſchung allemal anrathe, weil ſie zur Sicherheit der Bergarbeiter und zu Erſparung vielmals unnöthiger Verzimmerung oder Mauerung und anderer unterſtützender Befeſtigung des Geſteines ungemein viel beytragen kann. Wo die Bergleute es einer Steinwand, oder einem Felſenſtück nicht ſogleich anſehen können, ob es ſtehen bleiben, oder fallen werde, da beklopfen ſie es mit ihren eiſernen Schlägeln oder Fäuſteln. Klingt der Schlag helle, ſo hängt das Felſenſtück mit ſeinem Ganzen noch feſt zuſammen; klingt er hohl und taub, ſo ſorgen ſie vor deſſen Unterſtützung nach einem Ungefehr. Dieſe Gewohnheit iſt zwar nicht zu verachten, doch muß alle Unterſtützung nach einem rechten Winkel geſchehen, denn ſie wiederſtehet dem Falle eines Körpers am ſtärkſten. Ein feſter Körper, deſſen Mittelpunct der Schwere von einem andern Körper unterſtützt wird, ruhet auf dieſem; ruhet er auf ihm, ſo drückt auch ſeine Schwere auf ihn, alſo muß der unterſtützende ſo feſte und ſtark ſeyn, daß er jenes und der andern über ihn liegenden Körper Schweren zuſammentrage, ohne zerdrückt zu werden. Hieraus folget, daß man die feſteſten Körper bey Unterſtützung oder Errichtung eines Gebäudes zu unterſt und die lockerſten, leichteſten zu oberſt legen müſſe, wenn das Gebäude nicht einfallen ſoll. Dieſer Satz hat ſeinen beſondern Nutzen bey der

Mauerung in Schächten, Strecken, Geſenken und andern unterirdiſchen Gebäuden.

Alles dieſes vorausgeſetzt, will ich nach oben angenommener Ordnung zu erſt von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen handeln. Wenn eine Röſche oder Stollen im Hangenden angeſetzt, und durch dergleichen ſchwebend liegendes Geſteine getrieben wird, ſo iſt, wenn die Steinlagen ganz und nicht zu klüftig ſind, gleich aus ihrer Lage und der zutreibenden Arbeit klar, daß hier keine Unterſtützung nöthig ſey, denn die Steinlagen liegen unter und über einander, und unterſtützen ſich ſelbſt.

Man handelt weislich, wenn man den Stollen in der Firſt rund aushauen läßt, die Arbeit und Koſten der ſonſt an der Firſt auszuhauenden Ecken *b. Fig.* 2. zu erſparen; man gewinnet noch überdies Zeit, giebt der Firſt des Stollens Wölbung und Feſtigkeit gegen den Druck, und die Wetter wechſeln freyer oben an der Firſte hin. Fallen aber auch Sand- Letten- Mergel-Lagen zwiſchen den Steinlagen vor, durch welche die Röſche oder der Stollen getrieben wird, ſo ſind dieſe Stellen mit Zimmerung oder Mauerung abzufangen und zu verwahren, damit ſie nicht, wenn ſie von den Wäſſern erweichet ſind, mit ſelbigen in den Stollen, Röſche fallen, und das, was darüber liegt, nachſtürze, und der Stollen, Röſche, zerbreche. Wie die Zimmerung ausſiehet, und beſchaffen ſeyn ſoll, findet man in den alten Bergbüchern. Nur wollte ich, daß man die Köpfe der Thürſtöcke halb rund einſchnitte, und die Kappen an beyden Enden dergeſtalt vorrichtete, daß ſie da, wo ſie auf die Thürſtöcke zu liegen kommen, nicht zu ſehr geſchwächet, und mit einem kleinen Abſatze, der die Köpfe der Thürſtöcke von einander halten muß, wohl eingeleget würden.

Damit nun die Thürſtöcke wegen ihrer Länge vom Drucke des Gebürges nicht ſo leicht gebogen, oder gar zerdrücket werden, ſo legt man insgemein 2. biß 3. Fuß, von der Stollen- Sohle in die Höhe, Stege, oder Hölzer quer über den Stollen zwiſchen die einander gegenüberſtehenden Thürſtöcke mit ihren Enden auf den eingeſchnittenen Abſatz jedes Thürſtockes nicht allein zur Befeſtigung derſelben, ſondern auch, daß Bohlen darauf geleget werden, die Förderung über dieſelben hin geſchehen, und die Wäſſer unter denſelben fort laufen können; man nennet dieſe Zimmerung das Träge- oder Tragewerk. Wenn die Bohlen genau neben einander der Länge nach auf die Stege geleget, und angenagelt werden, daß ſie überall und ſonderlich mit ihren Einſchnitten an den Thürſtöcken wohl ſchließen; ſo ziehet die friſche Luft, wenn alles wohl mit Letten verſchmieret worden, unter dieſem Trägewerke hin, und bringet dem innern Gebäude gute Wetter; der Raum aber zwiſchen dem Trägewerke und der Stollenſohle wird von den Bergleuten die Waſſerſeige genannt, worinn die Wäſſer ablaufen. Da aber alle Zimmerung mit Holze, ſie mag ſo gut gemacht ſeyn, als ſie will, öfters in kurzer Zeit in den unterirdiſchen feuchten Gebäuden bald zu ſtocken und zu faulen anfängt, auch das von der Fäulniß angegriffene Holz immer heraus geriſſen, und wieder neues eingewechſelt werden muß, welches allemal neue Arbeit und Köſten verurſachet; ſo gebe ich den wohlgemeinten Rath, die Mauerung, ſoviel nur immer möglich, der Zimmerung zu Befeſtigung der unterirdiſchen Gebäuden vorzuziehen. An Mauerſteinen fehlet es, ſonderlich in Gebürgen, die aus ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen beſtehen, niemals. Man findet daſelbſt die meiſten Steinbrüche, nur muß man ſich vor merglichten Sand- und andern Steinen, die der Verwitterung unterworfen ſind, hüten. In Röſchen, Stollen, Strecken wird mit hinlänglich dicken, breiten und langen, aus dem Gröbſten zugehauenen Steinen gemauert, wobey man ſich nach dem ſtarken, oder ſchwachen Drucke des Gebürges richtet, und die Steine neben und übereinander gewöhnlichermaſſen verbindet, auch hie und da einen längern und gegen des Gebürges Druck breitern Stein in das Mauerwerk mit einleget, daß endlich in der Firſt zu gewölbet wird, wenn es nöthig iſt.

In Gebürgen ſchwebend liegender Steinlagen werden auch Schächte abgeſunken, und, entweder ganz durchaus, oder nur bis auf die erſte feſte Steinlage unter der Damerde gewöhnlichermaſſen verzimmert, ſo aber gar ſelten lange dauert. Auch bey Schächten würde ich lieber die Mauerung anrathen.

Zur Verbeſſerung ſowohl der Schachtzimmerung als Mauerung, in Anſehung der Feſtigkeit, will ich hier einen Vorſchlag thun. Man findet in verſchiedenen Berggegenden, wo auf Eiſenſtein gebauet wird, runde und bisweilen ziemlich tiefe Schächte, die nur mit Knütteln und Zaungärten ausgeflochten ſind, und dennoch dem Drucke des Gebürges ſehr gut widerſtehen. In Engelland und Schottland findet man viel dergleichen Schächte bey den Kohlenbergwerken, ſie werden auch theils wie die runden Brünnen ausgemauert, und widerſtehen dem ſtärſteſten Drucke des Gebürges beſſer, als das gerade Holzgezimmer, da ſie die Eigenſchaft der Gewölber haben. Weil ſich aber die runde Geſtalt nicht gut für tiefe Schächte ſchickt, und ihr Durchmeſſer wegen eines aufzuſtellenden langen Rundbaums, worauf ſich viel Seil bey dem Heraufziehen und Hinablaſſen der beyden Bergkübel wickeln muß, folglich ſolche Schächte ſehr weit gemacht werden müſſen, welches mehr Arbeit, Zeit und Koſten verurſachen würde, ſo hat man bisher die länglicht viereckigte Geſtalt noch immer beybehalbehalten, und zur Auszimmerung derſelben gerades gleiches Holz gebraucht, wenige aber ausgemauert.

Wenn ich für mich Bergwerk bauen ſollte, würde ich bey tiefen und untiefen Schächten mich einer länglicht runden Figur bedienen, die Wölbung derſelben gegen den ſtärkeſten Druck des Gebürges richten, und die Jöcher, wenn mir die Ausmauerung gar zu koſtbar wäre, von krummen Holze machen und damit auszimmern laſſen; der Fahrſchacht aber würde in der einen Spitze dieſer Figur angebracht, und, wie gewöhnlich, gegen den Ziehe-Schacht mit Einſtreichen und Brettern verſchlagen werden.

Hier wird der Bergmann lächeln, die länglicht runde Figur zu Schächten für zu künſtlich halten, ihre Stärke aber vielleicht nebſt dem Thunlichen nicht gleich einſehen, und fragen, wo er das krumme Holz dazu hernehmen ſollte. Ich will es ihm ſagen: Alle Jahre wird in den Wäldern Holz gefället und ausgeäſtet; man gebe denen, ſo darüber zur Aufſicht beſtellet ſind, ein Model zur erforderlichen Krümme des Holzes, ſo zu den Jöchern dienen ſoll, und bezahle auf die Klafter ſolches Holzes etliche Kreuzer mehr an Forſtgebühren, ſo wird ſich krummes nach dem Model brauchbares, ſonderlich Eichenes von Zeit zu Zeit genug ſammeln laſſen; denn es werden bey Bergwerken nicht alle Jahre ſo viel Schächte abgeſunken, daß ſich nicht genugſames krummes Holz zu ihrer Auszimmerung finden ſollte. Gehet es in manchen Ländern an, daß Knieholz zum Schiffbau geſammelt wird, ſo wird es auch angehen, in den Bergwerken nahe gelegenen Wäldern krummes Holz zu Schächten, ſonderlich von ſtarken Aeſten zu ſammeln, welche mit der Säge getrennet und ſo ſtark geſchnitten werden können, als ſie zur Schachtzimmerung nöthig ſind. Dergleichen krumme Hölzer werden über 5. 6. bis 8 Zoll zu Jöchern nicht dicke ſeyn därfen, weil ſie einen viel größern Druck, als gleichgewachſenes Holz aushalten. Man mache den leichten Verſuch, und ſuche beyde Gattungen Holz, das gleiche krumm, und das krumme gleich zu beugen, ſo wird man, wenn beyde Hölzer von einerley Dicke und Länge, auch einerley Art ſind, den Unterſchied der Kraft ſo gar mit Händen fühlen, ſo bey ihrer Beugung angewandt werden muß. Das krumme Holz wird mehr Widerſtand als das gleiche leiſten; will man die Urſache hievon wiſſen, ſo betrachte man beydes, und es wird ſich zeigen, daß die Faſern des gleichen Stückes alle gleich und gerade nebeneinander hin liegen, bey dem krummen aber dieſelben maßlich und knörzlich, vielmal ganz wellenförmig innerhalb ſeiner Krümmung feſt in einander gewachſen, außerhalb derſelben aber geſpannet ſind; ſollte dieſes nicht mehrere Stärke des krummen Holzes verurſachen?

Die Stärke und Dauer eines ſolchen mit krummen Holze ausgezimmerten Schachtes fällt zu deutlich in die Augen, als daß ſie eines weitern Beweiſes bedarf; und da das krumme knörzliche Holz auch der Feuchtigkeit, und Fäulniß mehr widerſtehet, als das gleiche, ſo wird die Zimmerung mit krummen Holze auch deßwegen vor dem gleichen den Vorzug haben. Die Zimmerlinge bey Bergwerken verarbeiten zwar das gleiche Holz lieber, als krummes und knörzliches; man muß ſich aber daran nicht kehren, ſie müſſen thun, was ihnen befohlen wird, oder es giebt andere an ihre Stelle. Der Nutzen der bauenden Gewerken muß das erſte Geſetz ſeyn; denn ſie geben das Geld dazu her. Die 3. Fig. zeiget dergleichen länglichte runde Schachtzimmerung, da *a* der Ziheſchacht, *b* der Fahrſchacht, *c* die Jöcher, *d* die Kappen, *e* die Fahrt, und *f* die Löcher zu den Haſpelſtützen andeuten.

Da die Mauerung der Feſtigkeit wegen aller Holzzimmerung vorzuziehen iſt, ſo ſollte man lieber die Haupt- und Förderſchächte ausmauern laſſen, aber nicht auf die bisher gewöhnliche Weiſe, da alle halbe oder ganze Lachter auf gemeine ſenkrechte Mauer wieder ein oder zwey Bogen, ſowohl an den beyden langen Seiten, als auch an den beyden kurzen Stöſſen des Schachtes von der Sohle bis zu Tage ausgemauert werden. Obgleich dieſe Bögen der Mauerung in ihrer ſenkrechten Linie Stärke gegen ihren eigenen Druck geben, ſo können ſie doch dem Seitendrucke des Gebürges, welcher zugleich von deſſen ſenkrechtem Drucke mit abhänget, nicht vielmehr als eine gemeine Mauer widerſtehen; dieſem Seitendrucke aber, auf welchen man hauptſächlich ſein Augenmerk richten muß, will ich eine feſtere und ſtandhaftere Mauerung in den Schächten entgegen ſetzen, welche aus Fig. 4. zu erſehen iſt. Bauverſtändige werden ihre Stärke und Dauer gleich aus der Betrachtung ihrer Geſtalt deutlich einſehen; *a* iſt der Zieheſchacht, *b* der Fahrſchacht *cc* Löcher vor die Haſpelſtützen, ſo aber bey einem groſſen Treibe Schachte nicht nöthig ſind, *d* die Fahrt.

Wie die Steine bey dergleichen Mauerung in einander zu verbinden ſeyn, wird ein Mauermeiſter, der ſein Handwerk verſtehet, leicht finden; ich habe dabey weiter nichts zu erinnern, als daß, wo der Druck nicht allzuſtark iſt, Lachter um Lachter gemeine Mauerung der Höhe nach zwiſchen die liegende Wölbung geſetzt werde; bey donnlegigen oder flachen Schächten könnte es bey der bisher gewöhnlichen Bogenmauerung bleiben, ob ich gleich, ſo viel nur immer möglich, flache Abſinkung der Schächte vermeiden würde.

Wo zwiſchen ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen Kupfer- oder Alaunſchiefer, Zinnerze, Kieſe, Steinkohlen, Torff, Farben- oder andere Erden und brauchbare Steine liegen, wird, wenn man dieſe Dinge weghauen und gewinnen will, die darüber liegende Steinlage oder das ſogenannte Tach entweder mit dem zugleich ausgehauenen Geſteine hie und da, wie bey der Schieferarbeit gewöhnlich iſt, unterſchlagen, oder man läßt ein Lachter um das andere Bergfeſten davon ſtehen, die das Tach ſo lange unterſtützen, bis das Feld gehörig mit Oertern und Strechen rechtwinklicht zwiſchen den Bergfeſten durchfahren, und das Erz- oder Mineral aus ſelbigen gewonnen iſt; da man denn zuletzt von der tiefſten Gegend herauf die aus Erz- oder Mineral beſtehenden Bergfeſten nach einander weghauet, Erz- und Mineralien davon zu Tage ausfördert, und das Tach alsdenn ſtürzen läßt. Es iſt alſo hier weder Zimmerung noch Mauerung nöthig; wo aber das Tach nicht gut iſt, oder gar rolliges Gebürge, Sand, Kieß, Mergel, Letten vorfällt, da muß auf Zimmerung und Mauerung gedacht werden.

Was die in manchen ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen durchſetzende Gänge oder Wechſel betrift, ſo wird bey Bearbeitung derſelben in Anſehung der Unterſtützung und Befeſtigung des flüchtigen und loſen Geſteins eben das in Obacht genommen, was im folgenden Abſchnitte bey den Erz- und Mineralgängen in erhobenen Erd- und Steinlagen kürzlich angeführet werden wird. Im übrigen ſtehet insgemein das ſchwebend liegende Gebürge an- und vor ſich gut, und erfordert weniger Zimmerung, und Mauerung als das erhobene.

Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Eine Röſche, Stollen, ſo in dieſer Art von Gebürgen durch ganzes feſtes Geſteine getrieben wird, hat wenig oder gar keine Mauerung oder Zimmerung außer dem Trägewerke nöthig, und wenn ihre Firſt rund ausgehauen wird, ſo trägt, wie bereits oben gedacht worden, dieſes zu ihrer Feſtigkeit und Dauer ungemein viel bey; in rolligen, klüftigen Geſteine aber müſſen dergleichen unterirdiſche Gebäude mit Zimmerung oder Mauerung nach obigen Grundſätzen des vorhergehenden Abſchnittes gegen den Einſturz verſehen werden.

Wegen der Schachtzimmerung und Mauerung berufe ich ich mich hier wiederum auf das, was ich in dem vorigen Abſchnitte beygebracht habe, weil es ſich auch in erhobenen Erd- und Steinlagen anwenden läßt.

Die Zimmerung und Mauerung in den Geſenken iſt, wie in den Schächten.

Von der Unterſtützung des rolligen klüftigen und flüchtigen Geſteines und Gebürges in den Strecken, Ueberſichbrechen, Flügelörtern, Firſten, Hornſtädten, und auf Stroſſen läßt ſich in einer ſo kurzen Schrift, wie die gegenwärtige iſt, keine recht deutliche Beſchreibung abfaſſen. Wer ſich einen richtigen und deutlichen Begrif davon machen will, thut am beſten, ſie in den unterirdiſchen Berggebäuden ſelbſt aufzuſuchen und in Augenſchein zu nehmen; weil es aber auch nicht jedes Gewerken oder Bergwerks Liebhabers Sache iſt, ſich ſchmutzige Hände zu machen, und mit einiger Ungemächlichkeit ſich in die finſtere Unterwelt zu begeben, ſo empfehle ich ihnen die gewöhnlichen Zimmerungs- und Befeſtigungsarten unterirdiſcher Berggebäude im Löhneis und Rößlers Bergbauſpiegel auf den daſelbſt befindlichen Kupfern nachzuſehen, wo ſie noch am beſten vorgeſtellet ſind.

Die Bergleute haben im übrigen zu ihrer Zimmerarbeit nebſt einem Zollſtabe ein Maaß, das ſie eine Lehre nennen; es beſtehet aus zwey einzelnen Stäben, und mit dieſen meſſen ſie die Länge, Breite und Höhe desjenigen Ortes, wo Holz zur Unterſtützung und Befeſtigung des Geſteines oder Gebürges hingebracht werden ſoll, indem ſie dieſelben bald kurz, bald lang aneinander halten, und das zur Unterſtützung nöthige Holz damit ausmeſſen; dieſe Art iſt ihnen ungemein bequem, weil ſie dieſelbe unter der Erde überall auch in den allerengſten Oertern zur Ausmeſſung gebrauchen können.

⁂

Pl

BRITISH MUSEUM

Ph. abh. VII T. pag. 316

Fig. 1

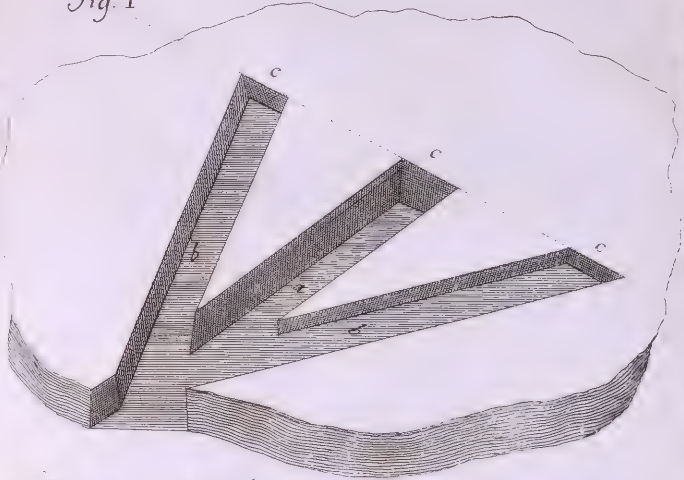


Fig. 2

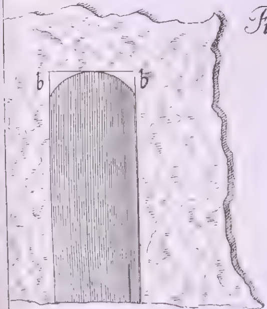
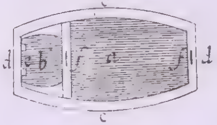


Fig. 3



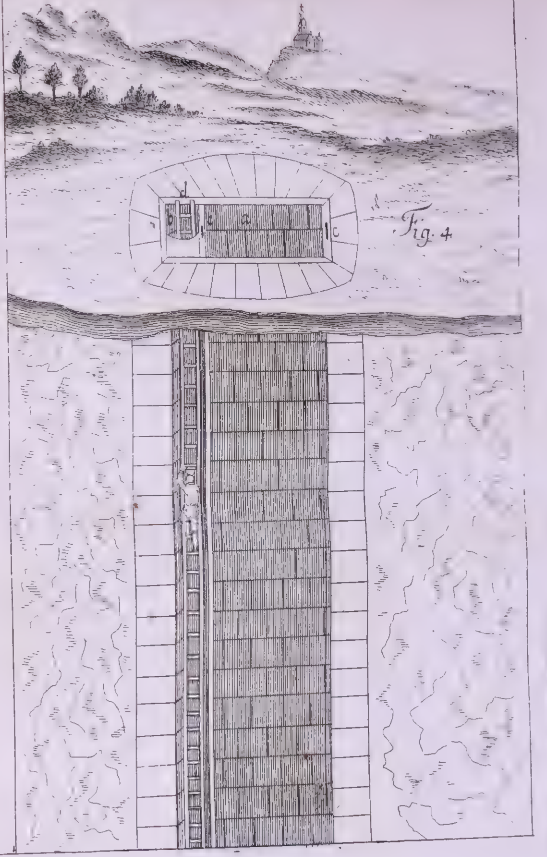


Fig. 4

Verſuche

Mit mineraliſchen ſauern Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen:

dann

zufällige Gedanken, wie aus dieſen Farben die
Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen,
Früchten, und Blätter der Vegetabilien zu erklären.

Von

Mathias Brunnwiſer,

der Philoſophie, und Arzneygelehrtheit Doctorn, dann
Stadtphyſikus zu Kehlheim, 1770.

Unter den merkwürdigen Begebenheiten, ſo die auf vielerley Art ſpielende Natur unſern Augen darſtellet, verdienen gewiß die Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten, mit welchen die Bäume und Pflanzen gezieret ſind, nicht einen geringen Platz.

Die grüne, blaue, rothe, gelbe, und von deren Vermiſchungen abhangende Farben ſind Wirkungen, wo die Natur ihre Bearbeitung unſern Blicken zu entziehen alle Sorgfalt anzuwenden ſcheinet. Und daher ſind meines Erachtens die Erklärungen der Pflanzenfarben entweder gar nicht berührt, oder auf hypothetiſche, und ſchwankende Gründe geſtützet worden.

Ich gedenke keineswegs in gegenwärtiger Abhandlung Jemanden zu überreden, daß ich etwas ungezweifeltes, oder unverwerfliches beweiſen werde. Ja ich will vielmehr im Gegentheil bekennen, daß ich die Schwierigkeiten dieſer Sache ſelbſt einſehe, und viele mir ſelbſt gemachte Einwürfe gänzlich zu heben außer Stand mich befunden habe. Und daher wünſche ich, daß die aus meinen Erfahrungen gemachte Schlüſſe nicht anders, als zufällige Gedanken angeſehen werden möchten. Habe ich in dieſen meinen Gedanken gefehlet, ſo ſchmeichle ich mir um deſto eher Vergebung zu erhalten, als ganz ſicher Fehlen menſchlicher iſt, als gar nicht denken.

So oft ich die Verſchiedenheit der Holzfarben in den friſch abgehauenen Stämmen, und die Veränderung derſelben, nachdem ſolche eine lange oder kurze Zeit in freyer Luft gelegen, nicht minder die öfters in den Wäldern gefundene dunkle, oder lichtbraune von der Fäule angegriffene Hölzer, auch jene weiße Farbe, ſo einige faſt verweſene, und im Finſtern leuchtende angenommen, mit einer Aufmerkſamkeit betrachtet habe; ſo iſt meine Muthmaſſung jederzeit dahin gegangen, daß ein gewiſſes Farbeweſen in den Hölzern verſteckt ſeyn müſſe.

Fichten, und andere Hölzer, wenn ſie lange der Luft ausgeſetzt ſind, werden von Zeit zu Zeit auf der Oberfläche gelber. Dieſe Farbe aber bleibt nicht für beſtändig, ſie wird nach und nach unſichtbar, und kömmt anſtatt dieſer eine blaulichte, oder blaulicht gräue hervor.

Da in dem erſten Umſtande das Holz noch in ſeinem Zuſammenhang bleibet, ſo ſcheinet in dem andern, nämlich bey Entſtehung der blaulichten Farbe der Zuſammenhang auf der Oberfläche etwas getrennet, und das Holz einer Auflöſung unterworfen zu werden, oder wenigſtens iſt das gelbe von dem Holze auf der Oberfläche losgemachte, und unſerm Geſichte vorgeſtellte Farbeweſen von dem Ganzen des Holzes durch die Witterung u. ſ. w. abgeſöndert worden, weil ſichtbare Faſen von dem Ganzen ſich ablöſen, und folglich zu vermuthen geben, daß jenes, ſo die gelbe Farbe gemacht, von dem Ganzen gekommen, und die Abſönderung der Holzfaſen verurſachet habe.

Dieſe Faſen ſind die Materie, womit Weſpen, nnd dergleichen Inſecten ihre Neſter bauen, welche ebenfalls die Farbe haben, ſo das der Luft ausgeſetzte Holz an ſich genommen hat. Und ſowohl dieſes, als die Gelbe giebt Anlaß auf eine innerliche im Holze ſteckende Farbe zu ſchließen.

Dieſe Erſcheinungen alſo überredeten mich, daß ein Farbeweſen, welches unſichtbar im Holze gebunden verſteckt lag, gegenwärtig ſeyn müſſe. Es war aber guter Rath theuer, wie dieſes von dem Holze abzuſöndern wäre, oder wenigſtens dem Auge erkenntlicher werden konnte. Wäſſer, und brennbare Geiſter, als die in dieſen Umſtänden gewöhnlichen und gebräuchlichſten Auflöſungsmittel, leiſteten mir keine, oder in ein und anderm nur ſehr geringe, und faſt unmerkliche Dienſte, gaben auch zugleich zu erkennen, daß dieſe aus mir noch unbekannten Urſachen keine Gewalt auf das im Holze ſteckende Farbeweſen haben müßten. Andere aber, und beſſere wollten mir nicht gleich beyfallen, obwohl mir die Natur den Schlüſſel, den ich Anfangs nicht erkennen wollte, in die Hände lieferte. Denn alle oder doch, die mehreſten Hölzer, wenn ſie abgehauen worden, ſind meiſtentheils weiß, z. B. Irlen. In einer kurzen Zeit aber leidet dieſes Holz in der Luft eine ſtarke Aenderung, und erſcheinet gelb gefärbt. Dieſe in der Farbe hervorgebrachte Aenderung aber konnte keine andere Urſache zum Grunde haben, als die Luftſäure, ſo auf die Oberfläche des Holzes gewirket hat.

Da nun dieſe Erwägung ſowohl als die Erfahrungen des Herrn Marggrafs, wovon ich hernach reden werde, meiner Einbildung ſehr ſchmeichelten, ſo folgte ich der Natur, und zog mineraliſche ſaure Geiſter den Brennbaren, und Wäſſern, als ein Auflöſungsmittel die Farben zu erhalten, vor, weil mineraliſche ſaure Geiſter, wo nicht alle, doch wenigſt ein oder der andere eine mehrere Aehnlichkeit mit der Luftſäure haben müſſe, oder konnte, als brennbare Geiſter, und Wäſſer.

Um nun in dieſer Sache eine Probe zu machen, und meiner gefaßten Meinung ein Genüge zu thun, beſtrich ich die gehobelte Oberfläche von verſchiedenen Hölzern mit mineraliſchen ſauren Geiſtern, und erſah zu meinem Vergnügen, daß dieſe nicht allein mehr Gewalt als Wäſſer, und brennbare Geiſter ausübten, ſondern auch das Geſuchte willig reichten. Ich erblickte nach ein- oder mehrmaliger Beſtreichung, und allzeit im Zimmer geſchehener Trocknung auf den Hölzern eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe, nur mit dem Unterſchied, daß die rothe, und blaue in der Geſtalt der Violeten erſchienen, zum Zeichen, daß die rothe mit der blauen, und die blaue mit der rothen vermiſcht ſey. Es zeigen ſich alſo die meiſten Hölzer, nach Unterſchied der angebrachten Geiſter, entweder ganz gelb, oder aber blau- und roth Violet. Daher will ich mich bey fernerer Benennung dieſer zwoen letzten Farben allzeit des Worts Violet bedienen.

Zwetſchgenholz mit Violetſäure giebt eine roth-dunkle violete Farbe, faſt alſo, wie noch nicht vollkommen zeitige Zwetſchgen, wenn der auf ſelben liegende blaue Reiff abgewiſchet worden, ausſehen. Birn- und Aepfelbaumholz iſt nicht ſo dunkel, ſondern mehr roth, Schlehen fällt mehr ins Blaue, wie das Roſen- und Heckenroſenholz in das licht Violete. Arlsbeerholz iſt angenehm roth Violet, die groſſe Weide durchſcheinend blau Violet. u. ſ. w.

Man muß ſich aber nicht zu ſtreng in die Beſchreibung halten. Ich beſchreibe die gefärbten Hölzer, wie ich ſolche bald nach genugſamer, aber auch nicht zu vieler Anſtreichung bemerket habe; denn nach einer Zeit verſchwindet in vielen Hölzern die blaue Farbe ganz oder in etwas, und macht, daß die Geſtalt von der Beſchreibung abweiche. Auch kömmt es darauf an, wie man die Hölzer ſtark oder ſchwach mit den ſauren Geiſtern überziehet. Kömmt man mit der Vitriolſäure zu ſtark, und bringt es zur Wärme, ſo werden viele Hölzer mit einer glänzenden Schwärze überzogen: glaublich darum, weil durch Beyhilfe der Wärme einige in dem Holze ſteckende Eiſentheile aufgelöſet werden, und zu dieſer Erſcheinung Gelegenheit geben.

Gleichwie aber die mineraliſchen ſauren Geiſter jeder für ſich bemeldte Farben in den mehreſten Hölzern ſichtbar machen, ſo ſcheinen ſie doch ſowohl nach dem Unterſchied der Hölzer, als ihrer ſelbſt einen Ausnahm zu machen.

Die Salzſäure kömmt in Hervorbringung gleicher Farbe mit Vitriolſäure am öfteſten überein, jedoch nicht allzeit, und viel ſchwächer. Als etwas beſonders habe ich bemerket, daß die Salzſäure aus dem wälſchen Nußbaumholz, wenn es ſehr oft überſtrichen wird, eine Olivenfarbe ausziehet, welches andere Säure nicht thut. Auch weder dieſer noch andere ſauren Geiſter ziehen aus andern Hölzern, ſo vielfältig ich auch Verſuche angeſtellt habe, eine in das Grüne fallende Farbe heraus.

Die Salpeterſäure erzwinget zwar ebenfalls die violete Farbe anfänglich bald, aber es macht zugleich, daß nach öfterm Anſtreichen das Holz gelb, und alſo die violete Farbe entweder verflüchtiget, oder in die Gelbe verſenket wird. Daher kann man mit dieſer Säure in verſchiedenen Hölzern vom Lichtgelben bis zur Bräune die Farben hervorbringen.

Die gelbe Farbe iſt allem Anſehen nach einer Verflüchtigung nicht unterworfen, wo hingegen die rothe, beſonders aber die blaue alle

Merkmaale einer Flüchtigkeit zu haben ſcheinen; oder wenigſtens hat die Salpeterſäure die Kraft, die rothe, und blaue in die gelbe zu verſenken.

Warum aber dieſe drey Säuren nicht auf gleiche Weiſe, und nicht in gleicher Geſchwindigkeit die Farben ausziehen, und die Salpeterſäure die violete verflüchtiget, oder auch verändert (ich getraue mir aus ſeinen Urſachen in dieſem Puncte nichts gewiſſes zu beſtimmen, obwohl ich für die Verflüchtigung eher ſtehen wollte) die Vitriol- und Salzſäure aber die violete, und nicht die gelbe ſichtbar machet, kann ich, ungeachtet ich eine Menge Experimenten gemacht, doch nicht beantworten, finde es auch zu meinem gegenwärtigen Ziel und Ende zu beantworten eben nicht für nothwendig. Vieleicht iſt in dem abgängigen, gegenwärtigen, oder durch die Miſchung hinzukommenden Phlogiſton oder andern in den mineraliſchen Geiſtern, oder Hölzern ſteckenden noch unbekannten Dingen die Urſache zu ſuchen. Denn da wir wiſſen, daß die Auflöſungsmittel den aufzulöſenden Sachen, und Niederſchlagungsmittel den niederzuſchlagenden angemeſſen ſeyn müſſen, ſo wird ohne Zweifel in dieſen die Urſache verborgen liegen.

Scheidewaſſer löſet das Gold nicht auf, bis der Zuſatz ſolches geſchickt, und ein Goldſcheidwaſſer macht, und nicht mit jeder Sache wird eine Præcipitation bewirket; und da es kein Geheimniß mehr iſt, daß mineraliſche Körper nebſt den reſinoſen, gumoſen, und anderen Theilen in den Pflanzen befindlich ſind, ſo kann es gar wohl ſeyn, daß gleichwie die Mineralien verſchiedene Auflöſungsmittel nach ihren inneren Beſtandtheilen fordern, auch ein gleiches nach der verſchiedenen Miſchung der gumoſen, harzichten, erd- und eiſenhaltigen Beſtandtheilen die Pflanzen zu zerlegen, oder ihre Farben zu gewinnen angewandt werden müſſe. Mehrere, und genauere Verſuche müſſen dieſes klärer machen,

chen, und in dieſer dunkeln Sache zu gewiſſen Schlüſſen Gelegenheit geben.

Da ich mich aber jetzt in dieſe Unterſuchung nicht einlaſſen kann; ſo begnüge ich mich mit dem, daß ich eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe aus vorerzählten meinen Verſuchen gewieſen, und deutlich vor Augen gelegt habe. Und eben dieſe drey Farben, nicht mehr oder weniger werden erfordert, uns jenes Reizende zu zeigen, was wir an den Blumen, Blüthen, und Früchten für ſo ſchön, und angenehm ſchätzen. Dieſe drey Farben, und ihre von der Natur geſchehende Vermiſchung ſind es, was unſere Augen in den Gärten, Wieſen, und Wäldern ergötzet, und beſonders einen Naturforſcher mit Verwunderung erfüllet.

Ehe ich aber dieſes beweiſe, muß ich zuvor zeigen, warum die mineraliſchen ſauren Geiſter, und nicht ebenfalls andere Feuchtigkeiten die Farben aus den Hölzern zu ziehen vermögend ſind.

Der unter den Gelehrten ſo berühmte als einſichtvolle Naturforſcher Herr Marggraf, Director der königl. preußiſchen Akademie der Wiſſenſchaften in Berlin, hat in dem zweyten Theile 49ſten Seite ſeiner chymiſchen Schriften das alcaliſche Salz ohne Einäſcherung der Pflanzen zu gewinnen gelehret, und zugleich überzeugend bewieſen, daß in allen Pflanzen ein weſentliches alcaliſches Salz enthalten ſey.

Ich hatte zwar gegen die Unterſuchungen, und Erfahrungen dieſes gelehrten Manns nicht den mindeſten Zweifel. Jedoch glaubte ich, daß ich in gegenwärtigen meinen Verſuchen ebenfalls meine Augen überzeugen, und in dieſer Sache fernere Proben machen müßte. Zu dem Ende habe ich die mehreſten Verſuche des Herrn Marggrafs nachgemacht, und zugleich viele andere mit den Hölzern, aus welchen ich das Farbeweſen auszuziehen dachte, unter Hand genommen, und in allen meinen neuangeſtellten Verſuchen jederzeit das alcaliſche Salz nach Wunſche erlanget.

Von dieſem Salze alſo ſowohl, als von den Farben, welche ich mit ſauren mineraliſchen Geiſtern aus den Hölzern gezogen, überzeuget, machte ich den Schluß, daß dieſes weſentliche alcaliſche Salz die Urſache, oder wenn noch andere zugegen ſeyn ſollten, die Haupturſache ſeyn müſſe, warum die Hölzer ihre Farben, ſo ſie eben ſo gewiß, als das alcaliſche Salz in ſich haben, unſern Augen verborgen halten.

Dieſes alcaliſche Salz iſt mit dem Farbeweſen in einer genauen Verwandſchaft, und ſie ſchließen ſich gemeinſchaftlich ſo feſt, und ſo lang in einander ein, das weder eines noch das andere zu erlangen iſt, bis die mineraliſchen ſauren Geiſter (denn mit dem Acido vegetabili, und animali habe ich keine Verſuche gemacht) angebracht werden, mit welchen ſich das alcaliſche Salz vereiniget, die nähere Verwandſchaft des Alcali mit der Säure dem Farbeweſen die Feſſeln abnimmt, ſolches in Freyheit ſetzet, und unſern Augen ganz ſichtbar vorſtellet.

Da alſo weder Wäſſer, noch brennbare Geiſter eine Gewalt in das alcaliſche Salz haben, und folglich die Bande, die ſolches mit dem Farbeweſen vereinigen, zu trennen unvermögend ſind; ſo folget von ſich ſelbſt, daß mit ſolchen das Farbeweſen nicht erlanget werden kann, außer es hätte ſich dergleichen mit gumoſen, oder harzichten Theilen verbunden, wo ganz natürlich geſchehen müßte, daß dieſes mit jenen aufgelöſt erhalten werden müßte.

Dieſer mein gemachter Schluß gründet ſich auf die oben gewieſenen Erfahrungen, nämlich, daß die ſauren mineraliſchen Geiſter wirklich das Farbeweſen auf den Hölzern zuwege gebracht haben. Ungeacht deſſen aber dünkte es mich, daß dieſe Verſuche, und Erfahrungen nur eine halbe Probe machten. Sollte alſo dieſer Schluß ſeine ganze Richtigkeit erlangen, ſo müßte ein alcaliſches Pflanzenſalz, wenn ſolches auf das durch die ſauren Geiſter gefärbte Holz angebracht würde, um eine ganze Probe zu machen, das losgemachte Farbeweſen nothwendiger Weiſe wiederum binden, in ſich nehmen, und dem Auge entziehen.

Deſſen mich zu verſichern, nahm ich verſchiedene Hölzer, beſonders aber Lindenholz, beſtrich ſolches mit Vitriolſäure, und zwang nach und nach die violete Farbe heraus. Sobald ſie getrocknet, und ſichtbar geworden, überſtrich ich ſolche mit einem reinen oleo tartari per deliquium ein oder mehrmal nach Gutbefinden. Auf welche Behandlung die violete Farbe nach und nach vollkommen wiederum ſich zu verlieren anfieng, und das Holz, wie zuvor, weiß erſchien, auch zugleich bekräftigte, daß das angebrachte alcaliſche Salz das Farbeweſen wieder in ſich genommen, und mit ſelbem ſich verbunden habe. Es fielen auch die vielfältigen Verſuche jederzeit gleich aus.

Mit dieſer neuen Verbindung des Farbeweſens mit dem alcaliſchen Salze, welche mir die Wahrheit meines Salzes bekräftigte, war ich noch nicht zufrieden, ſondern ich wollte auch ſehen, wenn das oleum tartari per deliquium mit Vitriolſäure wiederum geſättiget würde, ob das Farbeweſen mehrmalen zum Vorſchein komme. Nachdem alſo das Farbeweſen wiederum künſtlich verbunden geweſen, ſo beſtrich ich das farbenloſe Holz abermal mit Vitriolſäure, und es zeigte ſich die Farbe wiederum, wie zuvor, daß ich alſo keinen Zweifel mehr haben konnte, daß die Natur eben dieſe Mittel an die Hand nehme die Farben zu verbergen, oder in Vorſchein zu bringen, die durch Kunſt angewandt worden, ſolche zu erlangen.

Bey dieſem Verſuche iſt zu merken, daß man mit der Vitriolſäure etwas ſparſam umgehen müſſe, wo im Gegentheil, wenn dieſe zu ſtark in das Holz eindringet, und in den Holzfaſen eine gar zu grobe Wirkung machet, zwar das Geſuchte erlangt wird, aber gelblichte Flecken in dem Holze zurückbleiben, wie dann ohnedem das erzeugte Mittelſalz die Weiße des Holzes in etwas verunreiniget, aber dieſer Urſache wegen doch keineswegs die Erfahrungen ungewiß machet.

Weiters iſt zu merken, daß zu dieſen Verſuchen ein friſches Holz beſſer, als ein dürres iſt, weil durch die Austrocknung ſchon einige gumoſe u. ſ. w. Theile ſtark verändert worden, welches ebenfalls zu den gelblichten Flecken Anlaß giebt.

Aus dem bisher angeführten wird man ſchon abnehmen, daß ich nicht geſinnet ſey, den Pflanzen ihren Schmuck aus dem Sonnenfeuer anziehen zu laſſen, noch die Urſache der Farben in einer Verdickung der Nahrungsſäfte zu ſuchen, ſondern daß ſelben die Natur ihre gefärbte Kleidung aus dem Schooße ihrer Stämme ohne weitſchichtige Umſtände ganz ungezwungen mittheile.

Ich gedenke auch nicht, mich in eine Abhandlung von Farben einzulaſſen, noch zu unterſuchen, weſſen Natur, und Eigenſchaft dieſes im Holze ſteckende Farbeweſen ſey, oder wie ſolches in die Stämme der Pflanzen von der Natur geſetzt worden, ſondern ich will nur erklären, wie aus dem Stamme die Farbe, welche ſich durch die mineraliſchen Geiſter im Holze gezeiget, in die Blüthen, Früchten und Blätter übergebracht, und ſichtbar werden: welches ich mir auf folgende Weiſe vorſtelle.

Das Farbeweſen in dem Holze iſt mit dem alcaliſchen Salze gebunden, deſſen mich die mineraliſchen ſauren Geiſter in den erzählten Verſuchen überführet haben. Dieſe zwey innigſt vereinigten Dinge werden mit andern Nahrungsſäften in die Zweige, und von da in die äußerſten Theile der Oberfläche der Blüthen, und Blumen getrieben. Die Luft, welche ſolche unmittelbar umgiebt, berühret ſolche, und wirket mit ihrem in ſich haltenden Acido in die Blüthen und Blumen auf der Oberfläche, vertilget auch, oder ſättiget vielmehr das alcaliſche Salz, und alſo entwickelt ſich die Farbe, wie ſie ſich entwicklet, wenn ein Acidum auf ihrem Holze angebracht wird.

Es kömmt hernach nur darauf an, wie die Zuführungsſaftadern in ihrem Baue beſchaffen ſind, ob viel, wenig oder gar nichts mit alcaliſchem Salze verbundenes Farbeweſen durchgelaſſen, und auf die Oberfläche gebracht wird, oder ob nicht mit dieſem ein gewiſſer Saft ebenfalls mit durchdringet, der der ſchwachen Luftſäure Hinderniſſe im Wege leget, wodurch die Entwicklung der Farben verhindert wird. Denn es giebt Blumen, und Blüthen, welche viel, wenig oder gar nicht gefärbet ſind, ſo von bemeldten Urſachen herzukommen ſcheinet. Endlich wenn die Blüthe abgefallen, und die Früchten nach und nach in ihrem Wachsthume zunehmen, ſo wird den Frühling, und Sommer hindurch nach Art der Frucht ſoviel Farbeweſen zugeführt, daß die Luftſäure auf der Oberfläche der Früchten ſoviel entwicklen kann, und muß, daß einige ganz blau, wie Zwetſchgen, andere roth, wie Kirſchen, einige aber geſprängt, wie Birn und Aepfel, ausſehen, und ganz oder zum Theil jene Farben erhalten, die die Hölzer mit behandelten mineral Säuren gezeiget haben.

Die Luftſäure, auf welche ich mein Syſtem gründe, wird mir Niemand widerſprechen. Das Anroſten einiger Metalle, und Halbmetalle in freyer Luft, ein der Luft ausgeſetztes Laugenſalz, und dadurch erhaltenes Mittelſalz, ja die allgemeine Meinung leiſten mir genugſame Gewehrſchaft, daß eine Säure in der Luft enthalten ſey. Daher will ich mich mit Erprobung dieſer nicht weiter aufhalten, ſondern zu der Grüne der Blätter, und unreifen Früchten mich wenden.

Ein gelehrter Engelländer Eduard Delaval * glaubt, daß die Grüne der Pflanzen vom Eiſen herrühre, ſo in den Pflanzen verbreitet, und durch die Luftſäure in einen Vitriol verwandelt worden.

„ Die Quantität des in den Pflanzen enthaltenen Eiſens, „ ſagt er, wird jenen zu Hervorbringung ihrer Farbe nicht zu klein „ dünken, welche wiſſen, daß ein Gran Vitriol 10000 Granen „ Waſſer ſeine Farbe mittheilet, wovon nur ein kleiner Theil Eiſen, das mehreſte aber ein Saures, und Waſſer iſt. „

Ich gedenke gar nicht die Meinung dieſes gelehrten Engelländers zu beſtreiten, aber ich muß ſagen, daß die Mühe, die ich angewandt, aus ſehr vielem grünen Saft der Pflanzen eine Spur eines Vitriols zu entdecken, ganz und gar umſonſt geweſen iſt.

Und

---

*) Philoſophiſche Transactionen 55. Band für das Jahr 1765. art. 3. ſiehe auch neu Bremiſches Magazin I. Band Fol. 615.

Und deßwegen glaube ich, daß, weil man verſichert iſt, daß wirklich ein alcaliſches Salz in den Pflanzen enthalten iſt, und auch ebenfalls eine violete Farbe in ſelben die mineraliſchen ſauren Geiſter gezeiget, aus Vermiſchung dieſer zweyen die grüne Farbe in den Pflanzen entſtehen könne. Wenigſtens ſind die chymiſchen Verſuche in dieſem Stücke eben ſo gewiß als des Herrn Delavals Experiment, wo er mit einem Gran Eiſenvitriol 10000 Granen Waſſer die Farbe mittheilet.

Allein, beyde dieſe Erklärungen ſcheinen hypothetiſch, und ohne hinreichenden Grund zu ſeyn, daß alſo meine wahre Meinung vorzutragen nicht überflüßig ſeyn wird.

Die Gefäſſe, wodurch die Nahrungs und Erhaltungsſäfte in dem thieriſchen Körper zu den Gliedern geführt werden, ſind von der Natur alſo geordnet, daß ſie in einen Theil ſehr reine, in die anderen aber dickere, und mehr vermiſchte Säfte nach Geſtalt, und Größe ihres Baues bringen können, und müſſen. Die Augenthränen ſind hell, und weiß, wohingegen der Schweiß ſich in einer ganz entgegengeſetzten Qualität befindet. Alſo auch in den Pflanzen. Die Canäle, die zu den Blüthen, und Blumen gehen, müſſen viel feinere Säfte zu denſelben führen, als die ſind, welche durch weitere Canäle zu den Blättern gebracht werden.

Zu den Blättern wird zwar auch die blaue, und rothe Farbe mit dem alcaliſchen Salze verbunden geführt, die in den Blüthen, Blumen, und Früchten enthalten ſind, aber eine gelbe Farbe, welche an Feinheit der rothen und blauen der Blumen, und Blüthen nicht gleichkömmt, gehet in größerer Menge mit andern gröbern Theilen auf die Oberfläche, weil die größere Zuführungscanäle ſolche durchlaſſen. Folglich hat die Luftſäure zwar eben die Gewalt, wie bey den Blüthen, und Früchten, und befreyet das Farbeweſen von dem alcaliſchen Bande. Weil aber die gelbe mit der blauen in einem gewiſſen Verhältniſſe, und Miſchung ſtehet, werden uns ſolche beyde Farben in Geſtalt der Grünen vor Augen gelegt, und nachdem unter der gelben viel oder wenig von der blauen vermiſcht iſt, ſo iſt auch der Unterſchied der dunkeln oder lichtgrünen Farbe der Pflanzenblätter zu ſuchen.

Es entſtehet aber die grüne Farbe eben ſo wenig eher als bey den Blumen und Früchten, als bis die Luftſäure auf deren Oberfläche gewirket, und die Farben entwickelt hat. Alle Blätter der Bäume, und Pflanzen ſind bey ihrer Geburt weiß, oder aufs höchſte, wenn durch die Luftporen zu den eingeſchloſſenen Blättern eine Luftſäure gebracht wird, weißgelblicht. Vegetabilien, welche nicht an der Luft ſtehen, ſind auch nicht grün. Graß unter Steinen, oder andern Körpern, welche es etwann bedecken, iſt nicht grün, ſondern weiß, und wird erſt, nachdem die Luft auf ſie wirken kann, anfänglich gelb, und nach einer Zeit, wenn auch die blaue vom alcaliſchen Salze entwickelt, und mit der gelben vermiſchet worden, ſtellet es uns die grüne Farbe vor.

Die Natur hält ſich hier an die Geſetze in Hervorbringung der Farbe, wie man es bey den abgehauenen Hölzern bemerket. Ein friſch abgehauenes Holz iſt weiß, liegt es länger in der Luft, wird es gelb: Die gelbe Farbe, wie vorhin geſagt worden, verſchwindet, und nach einer Zeit kömmt eine blaulichte. Würde die gelbe von dem Holze durch die Witterung nicht geſchieden worden ſeyn, ſo würde bey Entſtehung der blaulichten ebenfalls das Holz bey dieſer beyden Vermiſchung grün ausſehen.

Wollen wir der weitern Mühe uns nicht entziehen, und die Blätter bis in den ſpaten Herbſt verfolgen, nämlich die Zeit abwarten, da der Zufluß aus dem Stamme zu Ende gegangen, und die flüchtige blaue Farbe aus dem Stamme nicht mehr erſetzet wird, ſo werden wir bald die grüne in den Blättern vergehen, und die gelbe, oder ins Gelbe einſchlagende Farbe den Meiſter ſpielen ſehen. Alle Blätter ſind um dieſe Zeit gelb, oder kommen dem Gelben ſehr nahe. Die blaue Farbe hat ſich davon losgemacht, und iſt von der Sonne entweders verflüchtiget, oder in die gelbe verſchloſſen worden. Und dieſes gehet glaublich eben alſo zu, wie es zu geſchehen pflegt, wenn man blaugefärbte Seide mit der von mir aus gewiſſen Hölzern gezogenen gelben Farbe, heiß behandelt, wo die Seide anfänglich grün, alsdann aber, wenn ſie weiter in der gelben Farbe behandelt worden, eben ſo ſchön gelb wird, als wenn man es als weiß gefärbet hätte.

Doch iſt uns die Spur einer gegenwärtig geweſenen Blaue in den Blättern noch gar nicht entwichen; denn da zwar der Zufluß aus dem Stamme mit Zuführung der blauen Farbe zu Erhaltung der Grünen aufgehört, und die Miſchung zu Ende gegangen, ſo bleiben noch Merkmalè in einigen Blättern, die ins Blaue oder Violette einſchlagen. Man betrachte nur im ſpaten Herbſte Kirſchen, Aepfel, und andere Blätter, ſo wird man von dieſer Wahrheit überzeuget ſeyn, und dieſe Farben nicht läugnen können.

Eben dieſe Beſchaffenheit hat es auch mit der grünen Farbe der Früchten. Wenn die Blüthe abgefallen, wohin aus dem Stamme durch die kleinen Saftadern der feinſte Saft mit dem proportionirten Farbeweſen abgeſchickt worden, und nach der Gattung viel oder wenig ſeine Farbe gewieſen, ſo wird gemächlich der

Stiel größer, und die Saftadern erweitern ſich, wodurch nicht ſo feine Säfte, wie zu den Blüthen, aber auch nicht ſo grobe, wie zu den Blättern mit dem Farbeweſen und alcaliſchen Salze kommen, und die Früchten ſo lange grün erhalten, bis bey Reifung die Farbe mit Beyhilfe der Luftſäure ſich ſichtbar entwickeln, und ſich roth, blau, oder violet nach der Gattung der Früchten unſern Augen darſtellen kann.

Die Wärme oder das Sonnenfeuer hat bey dieſem Naturſpiel in Färbung der Früchten in ſoweit ebenfalls ſeinen Einfluß, daß ſelbes die Poren eröffnen, und der Luftſäure ein tieferes Eindringen verſchaffen kann. Und daher kömmt es, daß jene Früchten, ſo gegen Mittag, und frey der Sonne ausgeſetzt ſind, viel gefärbter, als jene ausſehen, ſo in einem ſchattichten Orte unter Blättern, oder gegen Mitternacht hangen.

Ehe ich meiner Abhandlung ein Ende mache, muß ich noch einer Einwendung begegnen, die mir mit allem Rechte gemacht werden könnte, nämlich, wie es möglich ſey, daß einige Hölzer in ihrem Innerſten des Stammes z. B. Sevenbaum, Eiben, Zwetſchgen, u. ſ. w. ſtark gefärbt angetroffen werden, und wie die Luftſäure in ſolche dringen, und das Farbeweſen entwickeln können.

Ich könnte hier antworten, daß die Luft die Poren der Hölzer durchdringe, und die Luftſäure, welche mit ihrer Feinheit vielleicht zu dem alles durchdringenden philoſophiſchen Mercurialgeiſt in einer genauen Sippſchaft ſtehet, mit ſich einnehmen, in dem Holze das alcaliſche Salz ſättigen, und die Farben entwickeln könne.

Allein es ſcheinet mir in dieſer Antwort ein gewiſſer Zwang zu herrſchen, der der Natur und der Erfahrung widerſpricht. Denn in dieſen Umſtänden müßten nothwendiger Weiſe die äußeren Theile des Stammes unter der Rinde gefärbter, als die inneren gegen das Mark ausſehen, weil die äußeren unter der Rinde am erſten von der Luftſäure müßten berühret und gefärbt werden, ſo aber juſt das Widerſpiel iſt; indem die gefärbten Hölzer nicht unter der Rinde, ſondern allzeit bey dem Marke die ſtärkſte Farbe haben. Ueberdas ſiehet man ganz deutlich, daß dem Eindringen der Luftſäure gewiſſe Schranken geſetzt ſind, die ſie nicht überſchreiten kann, und ſich nicht weiter als auf die Gegend der Rinde erſtrecken. Alſo ſehen wir, daß in den ſehr jungen Zweigen der Bäume die äußere Rinde grün iſt, und faſt die Farbe der Blatter hat. Werden dieſe Zweige älter, ſo iſt zwar die äußere Rinde nicht mehr grün, löſet man aber dieſe ab, ſo wird man die nachkommende noch grün antreffen, als ein Zeichen, daß da eben ſowohl, als bey den Blättern die gelbe, und blaue Farbe von der Luftſäure frey gemacht worden. Kömmt aber die Rinde an dem Stamme oder Aeſten zu einer gewiſſen Dicke, ſo iſt vergebens mehr eine grüne Farbe zu ſuchen, und zugleich hat die Wirkung der Luftſäure ſein Ende erreichet.

Glaublicher alſo, und der Natur gemäßner iſt es, daß die in den innern Theilen befindliche Farbe der Hölzer von dem Umlaufe der Säfte durch die Saftadern herrühre, und es mit ſolchen folgender maſſen zugehe.

Die Nahrungs- und Erhaltungsſäfte führen das Farbeweſen mit dem alcaliſchen Salze verbunden aus dem Stamme auf die Oberfläche der Blätter u. ſ. w. vermittelſt der Saftadern. Allda macht die Luftſäure das Farbeweſen von ſeinen alcaliſchen Banden frey und los, wie wir es in den Blumen, Blüthen, und Blättern erſehen. Die Zurückführungsgefäſſe nehmen das losgemachte Farbeweſen, was nicht in die Luft verfliegt, zu ſich, und führen es wieder zurück in den Stamme. Dieſes ledig gemachte Farbeweſen leget ſich an die Holzfaſen an, und bringt nach und nach die Färbung der Hölzer zuwege.

Dieſe Meinung ſcheinet um deſto mehr gegründet zu ſeyn, als junge Bäume in ihrem Stamme nicht gefärbt ausſehen, da hingegen alte, wo ſchon viele Jahre der Umlauf der Säfte das aufgelöſte Farbeweſen zurück geführt, und den inneren Holzfaſen die Farbe mitgetheilet, recht dunkel gefärbt ſind. Auch iſt allzeit das Innere gegen das Mark zu in den alten Bäumen gefärbter, und wird ſtuffenweiſe, oder von Ring zu Ring, welche die Jahre und das Alter der Bäume anzeigen, an der Farbe gegen die Rinde zu ſchwächer, weil jenes gegen das Mark älter, und ſchon öfters von dem freyen zurückgeführten Farbeweſen durchkreuzet worden, als jenes gegen die Rinde.

Eben durch den Umlauf der Säfte kann erkläret werden, warum man aus der Potaſche einen vitrioliſirten Weinſtein (Tartarus vitriolatus) ſcheiden kann; denn da die Luftſäure mit dem alcaliſchen Salze ſich auf der Oberfläche der Pflanzen verbindet, ſo wird dieſes Mittelſalz durch die Venen zurück in den Stamme geführt. Wenigſtens ſcheinet es mir die gewißeſte Urſache zu ſeyn, daß auf ſolche Art der vitrioliſirte Weinſtein in die Potaſche gekommen ſey.

Da ich nun mit den Farben der Pflanzen zu Ende bin, und von deren Entſtehung meine Gedanken eröffnet habe, ſo fällt mir ein, ob nicht ebenfalls zu glauben, daß die Luftſäure den durch die Lunge gehenden Chylus berühre, und alſo durch dieſes die Röthe des Geblüts verurſache. Wo zu die Wärme in dem thieriſchen Körper vieles beytragen kann. Sollte es hiedurch nicht eben ſo gut als durch das Acidum pingue des Herrn Mayers erkläret werden können? Vid. Diſſert. de Calc. viv. Doct. Schaller Theſ. 15.

Allein dieſes iſt ein Abwege, den ich nicht berühren will, weil ich mir nur von den Farben der Pflanzen zu reden vorgenommen habe. Doch kann ich nicht ungemeldet laſſen, daß ich ſtark vermuthe, daß, gleichwie die Farben von der Luftſäure in den Pflanzen entwickelt werden, auch ein gleiches mit jenem Weſen geſchehe, welches wir das Riechende nennen, und daß dieſes eben ſowohl wie die Farben von dem alcaliſchen Salze gebunden ſey. Eine Blume giebt den Geruch von ſich, bis ſie verwelket; aus welchem ich ſchließe, daß die Luftſäure allzeit neue Geruchtheile, welche von dem Stamme, anſtatt deren, die verfliegen, zugeführt werden, entwickelt, und die Geruchsnerven reizet, wodurch jene Empfindung entſtehet, die wir den Geruch nennen.

Wenigſtens glaube ich bemerkt zu haben, daß ſehr altes, dürres, und nicht mehr riechendes Wachholder- und Sevenbaumholz wieder einen Geruch gegeben, und die noch verſteckten riechenden Theile in Bewegung geſetzt worden, da ich ſolches mit Vitriolgeiſt beſtrichen habe. Und da riechende Hölzer und andere Körper, wenn ſie gerieben werden, mehr Geruch von ſich geben, ſo ſcheinet deſſen keine andere Urſache zu ſeyn, als daß durch die Wärme, die die Bewegung verurſachet, die Poren eröffnet, der Luftſäure der Eingang geſtattet, und das riechende Weſen durch ſolches befreyet werde.

Da ich bisher mit Erzählung meiner Verſuche, und aus ſolchen gezogenen Erklärungen der Pflanzenfarben umgegangen, ſo ſollte ich auch den Nutzen beſtimmen, der aus dieſer meiner Arbeit zu erwarten ſeyn möchte.

Allein ſolcher ſcheinet mir ſehr eingeſchränkt zu ſeyn. Doch vermuthe ich, daß, wenn man die Kunſt, Farben mit alcaliſchem Salze zu verbinden, wüßte, ſolche im Waſſer aufſöſete, und mit dieſen alsdenn blumentragende Pflanzen begöße, die Blumengärtner verſchiedene Farben auf den Blumen erzeugen könnten. Und da von Lichtviolet bis zur Dunkelröthe, dann von Lichtgelb bis zur Bräune, ja wohl gar bis zur glänzenden Schwärze die Hölzer mit Farben überzogen werden können, ſo könnten die Tiſchler, und andere im Holze arbeitende Künſtler, und Handwerker, wo ſie mit Schattirungen ihrer Arbeit eine Zierde zu geben gedenken, daraus einen Vortheil ziehen, und ſolche Farben zu ihrem Gebrauche anwenden. Nur wäre dahin zu trachten, daß man ein Mittel erfände, die flüchtige rothe, und blaue Farben einiger Hölzer zu fixiren. Man kann nichts ſchöners von einer violeten Farbe ſehen, als wenn Quittenholz gehörig mit Vitriolgeiſt beſtrichen wird; aber es iſt dieſe Farbe nicht beſtändig, weil die Blaue nach und nach verflieget, und nur eine Blaßröthe zurück läßt. Auch iſt neben dieſem zu merken, daß, wenn man die Hölzer mit mineraliſchen ſauren Geiſtern zu färben gedenket, man junges Holz, oder wenigſtens von alten Stämmen das Aeußere gegen der Rinde nehmen müſſe, weil die inneren Theile des Stammes von dem Umlaufe der Säfte, wie vorhin gemeldet, in einigen alſo geändert werden, daß ſie den Wirkungen den ſauren Geiſter widerſtehen.

Ob weiters in dieſen Verſuchen der Vortheil, ſolche Farben hervorzubringen, ſtecke, die jenen, welche man aus fremden Ländern zu uns bringet, gleich kommen, oder ſelbe etwann gar übertreffen, will ich eben nicht beſtimmen: doch glaube ich für gewiß, daß fernere Verſuche nicht umſonſt ſeyn würden; wenigſtens habe ich die Möglichkeit geſehen, und jene gefärbten Seiden- und Wollenzeuge, ſo hier beyliegen, und allen bekannten gelben Farben an Glanze, Schönheit, und Beſtändigkeit gewiß gleich kommen, wenn ſie ſelbe nicht gar übertreffen, können davon Zeugniß geben.

Dieſe Farben werden ohne Zuſatz, ohne Beize oder andere Weitläuftigkeit erhalten. Es iſt nichts anders nöthig, als daß man die mit mineraliſchen ſauren Geiſtern zugerichtete Farbe im Waſſer ſiede, und die Zeuge darinne ſiedend, oder nach den Umſtänden auch nur warm behandle.

Es iſt gar nicht ſchwer, all jene gelbe Farben, die uns verſchiedene gelbe Blumen weiſen, ſo ſchön ſie auch immer ſeyn mögen, auf Wollen- oder Seidenzeuge ſo feſt und beſtändig anzubringen, daß weder Sonne noch Luft an ſolchen die mindeſte Aenderung mache.

Iſt aber dieſes, wie es ganz gewiß iſt, ſo kann die göttingiſche Geſellſchaft der Wiſſenſchaften für die im 1765ſten Jahre aufgegebene Preisfrage, wenn es noch nicht geſchehen, Genugthuung erhalten, da ſelbe eine gelbe Farbe, ſo dem Weid und Krappe an Beſtändigkeit gleichkömmt, verlangte.

Weil die gelbe Farbe zu Hervorbringung der grünen unumgänglich nothwendig iſt, und ohne ſelbe kein Grün gemacht werden kann, auch die von mir gefundenen gelbfärbenden Materialien in allem Ueberfluße zu erhalten ſind, folglich in dieſem Puncte alle fremde oder müheſam zuhabende Farbmaterialien entbehret werden können, ſo vermuthe ich, daß dieſe meine gemachten Verſuche einen Nutzen ſchaffen werden.

Zum Beſchluße muß ich noch anmerken, daß die Blumen, Blätter, Rinden, Früchten, und andere aus dem Vegetabilienreiche genommene Farbmaterialien nur darum den Stoff zur Färberey geben, weil in ſelben die Farbe von ihren alcaliſchen Feſſeln durch die Luftſäure entbunden worden. Dieſes entbundene Farbeweſen trift man in einigen Blumen ſo locker, und freyhangend an, daß, wenn man auf Papier ſolche tröcknet, das Farbeweſen von der Blume abgeſöndert liegen bleibet.

Entdeckung
verſchiedener vegetabiliſchen
Farbmaterialien,
Seiden- und Wollenzeuge
ſchön und dauerhaft
gelb zu färben.

von

Mathias Brunnwiſer,

der

Philoſophie und Arzneykunſt Doctorn, und Stadtphyſikus

zu Kehlheim. 1771.

Die Farbmaterialien, die eine gelbe, beſonders aber gute, ſchöne, beſtändige, in der Luft und Sonne unveränderliche Farbe liefern, ſind meines Wiſſens eben nicht ſo zahlreich, als daß man nicht Urſache haben ſollte, mehrere zu wünſchen. Und daher glaube ich, daß gegenwärtige Entdeckung nicht gar ohne Nutzen ſeyn, und wo nicht vollkommen, doch reichlich die Zahl der gelben Farbſtoffen vermehren, und den etwann obwaltenden Mangel erſetzen werde.

Eine phyſiſche Betrachtung der friſch abgehauenen Hölzer, welche anfänglich weiß, nachdem ſie aber lange der Luft ausgeſetzt worden, auf der Oberfläche gelb, und nach dieſem blau- oder graulicht wurden, haben mich zur Entdeckung dieſer vegetabiliſchen Farben, und auch zugleich zu einer Abhandlung geführt, in welcher ich die grüne, rothe, blaue, und gelbe Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten der Vegetabilien zu erklären mich bemühet habe.

Da ich in dieſer Arbeit keine mir anſtändigen Vorgänger hatte, oder wenigſtens dergleichen mir nicht bekannt waren: und ich dennoch alle Hypotheſen vermeiden wollte; ſo habe ich allen Irrungen, und aus dieſen erfolgenden verdächtigen Schlüſſen vorzubeugen, pur allein auf ſolche Verſuche, und Erfahrungen mich geleget, welche zuverläßige gewiſſe Schlüſſe zu machen mich berechtigten.

Aus dieſen Verſuchen, und Erfahrungen habe ich erſehen, daß alle jene Farben, welche uns die Natur an den Vegetabilien zeiget, in dem Stamme unſichtbar ſchon verborgen liegen, und in der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Blumen erſt entwickelt, und unſern Augen zur Bewunderung vorgeſtellet werden.

Durch dieſe Erfahrungen bin ich belehret worden, daß nur drey Farben, nämlich eine rothe, eine blaue, und eine gelbe all jenes Schönen Urſache ſind, das wir an den Vegetabilien bewundern. Und eben dieſe Erfahrungen haben mich auch überzeuget, daß die drey mineraliſchen ſauren Geiſter dieſe Farben, jedoch in einem ſolchen Unterſchiede hervorbringen, daß die Salpeterſäure mehr auf die gelbe, Vitriol, und Salzſäure aber mehr auf die blaue und rothe ihre wirkende Kräften beweiſen.

Dieſe Erſcheinungen alſo waren für mich genug, nicht allein meine Aufmerkſamkeit zu erregen, ſondern auch weitere Verſuche vorzunehmen, und wo möglich, mit dieſen einen ökonomiſchen Nutzen zu verſchaffen.

Da ich aber in der Folge ſah, daß die rothe und blaue Farben meinen Wünſchen widerſtunden, und ich ſolchen einen mir anſtändigen Grad der Fixität beyzubringen noch nicht genugſames Einſehen habe, folglich dieſe mit Vortheile in ihrer auf dem Holze erſcheinenden Schönheit und Vollkommenheit auf Seden- oder

Wollenzeuge aufzutragen mich außer Stand befand: ſo habe ich ſolche wider meinen Willen verlaſſen, und in gegenwärtigen nur allein auf die Gelbe zu arbeiten mir angelegen ſeyn laſſen müßen. Jedoch bin ich nicht ungeneigt, und faſt entſchloſſen, bey ruhigeren Stunden, als gegenwärtige ſind, und beſſerer Gelegenheit, auch auf die anderen zwo Farben meine weiteren Verſuche um deſto mehr zu richten, als dieſe, wenn ſie fixiert, und in ſolcher Quantität, wie die gelbe, erhalten werden können, eben ſo gut den bekannten rothen, und blauen an Schönheit beykommen werden, als die gelbe mit den bekannten gelben um den Rang ſtreitet.

Es beſtehet aber die ganze Kunſt die gelbe Farbe zu erhalten nur in dem, daß man die Hölzer von verſchiedenen Bäumen, und Stauden mit Salpeterſäure behandle, und mit dieſer aus ſelben die verborgene Farbe ausziehe, oder vielmehr von ihren Banden, mit welchen ſie in dem Holze gefeſſelt iſt, erledige.

Damit ich aber dieſes alles klärer, und begreiflicher mache, ſo will ich die Behandlungen, und Verſuche ſelbſt, wie ich ſolche in meiner Arbeit vorgenommen habe, erzählen.

Ich ſammelte mir faſt alle Hölzer von Stauden, und Bäumen, die in unſerer Gegend wachſen: ſchnitt oder hobelte auf ſolchen eine Fläche, und erkundigte mich, wie dieſe, wenn ſie mit Scheidewaſſer öfters überſtrichen wurden, ihre Farbe zeigeten. Da dieſe Verſuche mich ſchon vorhin einſehen ließen, welche Hölzer die mehreſte, und ſchönſte Farbe lieferen würden, ſo bin ich in meinen Verſuchen weiter gegangen, und habe dieſe Hölzer entweder klein ſchneiden, hobeln, oder wohl gar raſpeln laſſen. Dieſe alſo zugerichteten Hölzer befeuchtete ich mit Scheidewaſſer, ließ es ſo lange ſtehen, bis ich glaubte, daß die ſehr dünnen Späne von dem Scheidewaſſer durchdrungen worden, und das in ſelben enthaltene weſentliche alcaliſche Salz, ſo nach den ungezweifelten Erfahrungen des Herrn Marggrafs im Holze ſtecket, (a) und nach meinen Erfahrungen das Farbeweſen bindet, (b) geſättiget würde. Dünkte mich das Scheidewaſſer allzuſtark zu ſeyn, (ſo aber zu dieſer Arbeit nicht leicht zu ſtark iſt) diluirte ich ſolches mit gemeinem Waſſer, wo ich aber Acht hatte, daß das Waſſer rein, und mit keiner alcaliſchen Erde geſchwängert ſey, dergleichen in unſerer Gegend wegen den Kalkgebürgen die meiſten ſind.

Es iſt eben nicht nöthig, daß man von dem Scheidewaſſer gar zu viel, ſondern nur in einer ſolchen Quantität nehme, daß das enthaltene weſentliche alcaliſche Salz, deſſen Quantität nicht gar groß iſt, geſättiget werde. Obwohl, wenn auch von dem Scheidewaſſer zu viel genommen wird, kein anderer Schade zu befürchten iſt, als daß man dies vergebens verlieret.

Die Salpeterſäure wird ſich auf dieſe Art mit dem im Holze ſteckenden alcaliſchen Salze, welches nach meinen in bemeldter Abhandlung von den Farben der Pflanzen enthaltenen Grundſätzen, mit dem Farbeweſen verbunden iſt, wegen näherer Verwandſchaft vereinigen, dem Farbeweſen aber die Feſſeln abnehmen, ſolches los machen, und der Willkühr des Künſtlers überlaſſen, welches neben anderen aus dem klar erhellet, weil die angefeuchteten kleinen Späne entweder ganz gelb, oder auch in einigen Hölzern violet erſcheinen: welche letztere Farbe aber in der Wärme bald verſchwindet, und ebenfalls gelb wird.

An dieſes auf ſolche Art gefärbte Holz, oder vielmehr an dieſes in dem Holze losgemachte Farbeweſen goß ich Waſſer, und ließ es in einem irdenen Geſchirre aufſieden.

(a) Man ſehe deſſen chymiſche Schriften II Theil. 49 Seite.

(b) S. meine Abhandlung von den Farben der Pflanzen.

Sobald es angefangen zu ſieden, oder auch noch eher, habe ich die Zeuge von Seide, Kameelhaar, und Wolle hineingelegt, und ſo lang ſieden laſſen, bis die Farbe ſich an allen Orten gleich angeleget, und die Zeuge durchdrungen hat.

Waren die Zeuge nach meinem Gutgedunken ſchön, und durchgehends gleich gefärbt, ſo habe ich ſolche alſobald von der Farbe herausgenommen, in kaltes Waſſer geworfen, ſtark und rein ausgewaſchen, und getrocknet.

Ich habe bey dieſer Färberey keine andere vor- oder nachgängige Zubereitungen, den gefärbten Zeugen einen Glanz, oder ſchönes Anſehen zu geben, anzuwenden nöthig gehabt: und doch habe ich an dieſen meinen Farben wahrgenommen, daß ſie den oſtindianiſchen, franzöſiſchen, und anderen gelben Seidenzeugen, welche mir in den Kaufläden für ſolche gezeiget worden, an Schönheit, Glanze und Anſehen nicht nachgaben: und überdas weder an der Sonne, noch Luft an ihrer Farbe, oder anderen Qualität Schaden litten, oder einer Veränderung unterworfen waren.

Zur Hervorbringung der gelben Farben ſind alle Gattungen der Hölzer von Bäumen, und Stauden, jedoch eines mehr als das andere anſtändig. Nur wenn man Hölzer nehmen wollte, welche harzicht wären, müßte man ein oder anderen Vortheil, wegen des Harzes, in Acht nehmen, weil dieſes die Zeuge verderben, fleckicht machen, und noch überdas die Salpeterſäure an Kräften ſchwächen würde.

Es würde zu lange, und auch überflüßig ſeyn; wenn ich alle vegetabiliſche Gewächſe, welche eine gelbe Farbe liefern, anzeigen wollte, indem dergleichen alle, und jede Gattungen ganz ſicher, und ohnfehlbar ganz gewiß geben.

Ich will nur ein Dutzend verſchiedener, in unterſchiedenen Gegenden wachſenden Vegetabilien zum Beyſpiele herſetzen: als das Holz vom

1 Felberbaum weiße Weide Salix vulg. alb. arboreſc. C. B.

2 Birnbaum.

3 Taxbaum, Eiben, Taxus offic. C. B.

4 Eichbaum.

5 Erlenbaum Alnus vulg. I. B.

6 Cornelbaum Cornus ſativ. I. B.

7 Maulbeerbaum.

8 Arlesbeerbaum Sorbus torminalis.

9 Erdartiſchocken Helianthemum indicum Tuberos. C. B. helianthus radice Tuberoſa Lin. Aſter peruan. tuberos. Battata Canadens. franzöſiſch Taupinampou.

10 Unnütze im Fruhjahre abgeſchnittene Weinreben.

11 Schlehendorn Acacia vulg.

12 Ausgewachſene, und im Herbſt abgeſchnittene Spargelſtauden, von welchen jeden ich drey Muſter eines auf Seide, eines auf Wolle von hungariſchen Ziegen, oder ſogenannte Kameelhaare: und eines auf Schaafwolle, oder Tuch der churfürſtl. Akademie hiebey habe einſenden wollen, um den Unterſchied der färbenden Hölzer ſowohl, als die Farben ſelbſten, welche nach den angezeigten Numeris auf jedem Muſter bezeichnet ſind, genauer einſehen zu können: jedoch mit der Anmerkung, daß eine dunklere, oder lichte Farbe auch viel von dem abhange, wenn man die Zeuge lange oder kurz in der Farbe ſieden läßt. Dieſe Farben, ungeachtet ſie ſchön, und dauerhaft ſind, würden doch von der Achtung viel verlieren, wenn ſie nur von raren, oder

auch nützlichen Hölzern allein z. B. Quitten, Birn- und Apfelbäumen genommen werden müßten. Da aber ſolche auch neben dieſen von ſchlechten, und verwerflichen Sachen, als abgeſchnittenen Wein- und Hopfenreben, Schlehendorn, ausgewachſenen Spargelſtauden, und anderen ſonſt unbrauchbaren Dingen bereitet werden können; ſo glaube ich, daß ſie jederzeit Aufmerkſamkeit und Schätzung verdienen.

In dem bremiſchen Magazin III. B. 48. Seite, wird eine gelbe Farbe aus Acaciablumen, Seide zu färben, vorgeſchlagen: und Herr Denſo in ſeinen Vorſchlägen von Erfindung neuer Farbſtoffen, welche im 5ten Stücke ſeiner monatlichen Beyträge zur Naturkunde befindlich ſind, hat die gelbe Sunftlilie zur gelben Farbe angewandt, welche vor der oſtindianiſchen gelben Farbe an Dauerhaftigkeit einen Vorzug haben ſoll.

Allein ſo gut, ſchön, und beſtändig auch dieſe Farben ſeyn mögen; ſo ſind jedoch dieſe Farbſtoffe nicht in ſolcher Quantität zu haben, welche etwan zum allgemeinen Gebrauche, und an allen Orten gewünſchet werden möchten. Im Gegentheile aber, da meine Farbmaterialien in allen Gegenden, ohne Köſten, ohne groſſe Mühe, und zugleich ohne Schaden geſammelt werden können; ſo werde ich zu entſchuldigen ſeyn, wenn ich dieſen vor jenen den Vorzug einräume.

Was aber noch betrachtungswürdiger zu ſeyn ſcheinet, ſo werden eben jene Hölzer, die am häufigſten wachſen, und zum hauswirthſchaftlichen Gebrauche mit ſchlechter Achtung angeſehen werden, öfters für die tauglichſten befunden, wovon das Felber- oder weiße Weidenholz (Salix vulg.) und die Staude von Erdartiſchocken (helianth.) zeugen.

Das Weidenholz mit Scheidewaſſer auf bemeldte Art zugerichtet, giebt unter andern Hölzern, beſonders auf die Seide die beſte, und mit dem ſchönſten Glanze verſehene Farbe: wie das Muſter N. 1. zeiget. Und da dieſer Baum an allen Flüſſen, und feuchten Orten im Ueberfluße von ſelbſten wachſet, und wenn er einmal in die Höhe gekommen, alle 3, oder 4 Jahre ſeiner Aeſte ohne Schaden nicht allein beraubet, ſondern auch mit leichter Mühe gepflanzet werden kann; ſo wäre dieſes Farbmateriale allein hinlänglich, ganze Länder zu befriedigen, und den Abgang aller gelben Farbſtoffen zu erſetzen.

Das Erdartiſchockenholz iſt in dem ökonomiſchen Gebrauche noch weit unter der Weide: denn ungeachtet daß die Wurzel in der Küche zu einer, zwar nicht jedermann anſtändigen, Speiſe, oder etwann zur Mäſtung des Viehes zugerichtet werden kann, ſo iſt jedoch der ſechs bis zwölf Schuhe hoch wachſende dicke Stengel wegen Weiche des Holzes weder zum brennen, noch zu einem andern Gebrauche anzuwenden. Hingegen ſcheinet ſolcher deſto tauglicher von der Natur zu den gelben Farben erzeuget worden zu ſeyn, wie das Nro. 9. beyliegende Muſter beweiſet. Man kann dieſes Gewächſe, welches auch im ſchlechten Grunde fortkömmt, mit geringen Köſten, und Mühe allenthalben nach Gutbefinden bauen.

Nichts alſo, vermuthe ich, kann den Werth dieſer neuen Farbſtoffen geringſchätzig machen, als etwann ein Vorurtheil, welches öfters ausländiſche Sachen nur darum höher ſchätzet, weil ſolche weit hergeholet werden müſſen, und theurer ſind, als jene, die uns die gütige Natur eben ſo gut in unſerm Vaterlande darbietet.

Ich muß aber doch bekennen, daß dieſe auf ſolche Art gefärbten Zeuge mit einer alcaliſchen Lauge, wenn man ſolche darinnen waſchen, oder auch nur darein legen wollte, würden verdorben werden.

Allein, wenn man betrachtet, daß Seide, und Wolle in Lauge zu waſchen nicht gebräuchlich iſt, indem ſowohl Seide, als Wolle in der Lauge aufgelöſt und auseinander geſetzet werden; ſo kann ich weiter nicht einſehen, warum aus dieſer Urſache die angegebenen Farben nicht ihren Werth beybehalten ſollten: beſonders, da, wenn die Zeuge zu reinigen nothwendig befunden werden ſollte, man mit Seife ſolches bewerkſtelligen kann, wodurch die Farben keineswegs verdorben, wohl aber wegen einer gewiſſen dunklern Schattirung ſchöner, und nach dem verſchiedenen Geſchmacke oder Einbildung ein angenehmeres Anſehen erhalten werden.

Dieſes alſo iſt es, was ich einer erleuchten Akademie einzuſenden für gut befunden habe. Sollte durch dieſe Entdeckung meinem Durchleuchtigſten, und gnädigſten Landesherrn, und der churfürſtlichen Akademie der Wiſſenſchaften ein höchſtes, und hohes Wohlgefallen, meinem Vaterlande aber ein Nutze, und überhaupt meinem Nebenmenſchen ein Vortheil zuwachſen, ſo werde ich mich glücklich ſchätzen, und mein Ziel erreicht haben. Sollte aber dieſe Entdeckung zum gemeinen Nutzen noch nicht hinlänglich, ſondern einigen von mir nicht eingeſehenen Beſchwerniſſen etwann unterworfen ſeyn: ſo verlaſſe ich mich wenigſtens auf das gemeine Sprüchwort: Inventis facile eſt addere.

* * *

Gedanken,

wie dem faſt jährlichen,
von

Austrettung der Flüße

verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuern ſey.

Von

P. Clarus Mayr,

Benediktinern zu Vormbach.

Ich habe die Pflicht, der churfürſtl. Akademie eine philoſophiſche Abhandlung vorzulegen, zu welcher mich nicht nur meine Neigung zu phyſikaliſchen Gegenſtänden, ſondern vielmehr eine wahre Menſchenliebe veranlaſſet hat. Ich wage es, derſelben meine Gedanken, wie dem faſt jährlichen von Austrettung unſrer nahmhaften Flüße verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuren ſey, zur Prüfung zu überreichen, und zugleich unſre ſchifreichen Wäſſer, forderſt den mir ſo geliebten Innſtromm, nicht als unſere Feinde, ſondern als unſere wahren Freunde vorzuſtellen: wenn wir nur ſelbe als ſolche zu gebrauchen, uns von keinem Vorurtheile hindern laſſen.

1. §.

Man muß das Waſſer, indem es unſern zeitlichen Gütern ſo empfindlichen Schaden zufüget, doch immer für unſern beſten

Freund anſehen, der aber unverhoft in ſo groſſe Wuth verſetzet wird, daß er die ſchädliche Wirkung derſelben auszuhalten, ſich nicht mehr im Stande befindet, eine Ausſchweifung, die auch im geſellſchaftlichen Leben oft eben jene dahin reißt, die die beſte Gemüthsart beſitzen. Man muß aber eben darum dem Waſſer auf die Art, wie einem vom gähen Zorne zu sehr bewegten Freunde begegnen. 1tens, daß man den nahen Schaden abzuwenden ſuche. 2tens, daß man ſich, wenn ſelber nicht mehr zu mäßigen iſt, doch hievor ſicher ſetze. 3tens, daß man nach dem Schaden alles in den alten Stand zu ſetzen ſich bemühe, oder, die Anwendung zu machen, 1. daß man vor der Ergüßung eines Stroms an den Ufern Anſtalt mache, die gähling eindringende Gewalt zu brechen. 2. die wirkliche und nicht zu hindernde Ergüßung unſchädlich zu machen. 3. nach der Ergüßung den gemachten Schaden wieder zuerſetzen.

2. §.

Ich rede hier nicht von der traurigen Naturerſcheinung eines gähen Wolkenbruches, der ſeine durch lange Thäler reißende Wuth kaum nach Verheerung des freyen Landes endet. Ich gedenke nur den ſchädlichen Wirkungen der ſo gewöhnlichen und jährlichen Ueberſchwemmungen nahmhafter Flüße, und Bäche zu ſteuren; und dieſe wollen wir nun in ihrer Ruhe betrachten, in einem Stande, wo ſie ſich uns nicht nur zur Ergötzung unſerer Sinne, ſondern auch zu aller Hülfe unſrer Nothdurft mit ſo getreuen Dienſten, als immer die Naturgeſetze von ihnen verlangen, täglich darbieten. In dieſer Ruhe wollen wir ſie betrachten, um ihre Unruhe, oder die Art ihrer Ausſchweifungen kennen zu lernen. Wir werden unſere Wäſſer nirgends ruhiger ſehen, als, wo ſie Raum finden, ſich ohne Einſchränkung nach der Breite ergießen zu können. Da fließen ſie ſo ruhig, das man faſt zweifeln ſollte, ob ſie ſich wohl bewegen: und leiten uns zugleich auf den Schluß, den der berühmte Naturforſcher Herr Buffon ſchon lange gemacht hat, daß je unmerklicher das Rinnſal des Waſſers von der Horizontallage abnimmt: und je weniger die Maſſe des abfließenden Waſſers eingeſchränket wird, deſto weniger wir von deſſen Bewegung zu fürchten haben: Bedingungen, wovon die erſte öfters, die letzte aber faſt allezeit durch unſern Fleiß erfüllet werden kann, und ſo köm̃t es nur darauf an, daß wir unterſuchen, was unſern Freund bey einer kleinen Bewegung zerſtreuen, und bey einer größern Ausſchweifung ſchwächen könne. Man mache alſo 1. einem Fluße, wo es ſich thun läßt, ein Flußbett, das von der Horizontallage nur ganz unmerklich abnimmt. 2. mache man ihm forderſt da, wo deſſen zu gäher Abfall, Lauf oder Zug nicht zu verändern iſt, oder, wo ihm das Ufer zu wenig Widerſtand machen kann, einen Raum, daß er ſich ausgießen könne. So werden wir wenigſtens bey der Rückſicht auf vorige Zeiten, auch nach ſehr groſſer Ueberſchwemmung uns nicht über viel gemachten Schaden zu beklagen haben.

3. §.

Da ich nicht zweifle, man werde den Vortheil des erſten Vorſchlags, nämlich des unbemerklichen Abhangs des Rinnſaals ohne Aufenthalt, einſehen; ſo förchte ich auch nicht, daß man wider den mit Fleiße gemachten Raum zu Ergüßung des Flußes gründliche Einwürfe beybringen werde. Kann ſich ein Waſſer ſo ergießen, daß es in Verhältniß des Hauptſtromms faſt ſtill ſtehe, ſo wird es auch, wenn es ſich ſchon über unſere Felder, und Wieſen ausbreiten ſollte, uns anders nicht ſchaden, als daß es 1. die Erde, die es bedeckt, aufweiche, und ſo flüßig mache, daß ſie mit der abnehmenden Fluth fortgeſchwemmt werde, oder 2. wo der Abflaß nicht iſt, den Boden, und die Frucht unter neu angeſchwemmte Erde begrabe. Die erſte Wirkung iſt zwar beträchtlich genug, weil ſie die Urſache iſt, warum wir erfahren, daß man erſt, nachdem das Waſſer abfließt, und ſich mindert, zum meiſten über den Raub der Feldfrüchte, und über den wirklich, oder doch nahen Einſturz der Gebäude und Häuſer zu klagen hat, indem wenn das Waſſer zu fließen anfängt, ſelbes nicht nur alles, was darauf ſchwimmen kann, ſondern auch, was ſich von ſelbem faſt bis zur Vermiſchung bewegen läßt, nämlich die auf Feldern, oder an- und unter den Gebäuden aufgeweichte Erde mit ſich fortzunehmen pfleget. Aber, nebſt der Hülfe, die ich zur Verſicherung der Gründe bald vorſchlagen werde (§. 10. — 13.) da wir den Raum der Ergüßung ſelbſt vorbereiten, können wir ihn nicht ſo zurichten, wie es uns ſelbſt zum beſten gedünkt, den nahen Schaden abzuwenden? Laſſet uns alſo den Platz, den wir der Ergüßung des Stromms wiedmen, am Ufer ſo verſchanzen, das ſelber nur bey gar groſſer Ueberſchwemmung mit der ganzen Gewalt der Fluth übergoſſen werden könne. Laßt uns 2. in dieſem aufgeworfenen Ufer dem an- und ablaufenden Waſſer nur eine, oder die andere enge Oeffnung machen, damit die Ausgüßung nicht mit Gewalt eindringe, ſondern nur ſanft einſchleiche. Laßt uns 3. dieſe Oeffnungen alſo mit Geſträuchen verlegen, daß faſt nichts, als das Waſſer durchfließe, ſo wird uns auch bey dem Ablaufe von Frucht, und Erde das meiſte zurückbleiben.

4. §.

Haben wir nun Mittel, die angeführte erſte Wirkung, nämlich den Raub der Früchte, und Erde faſt unſchädlich zu machen, ſo därfen wir uns vor der zweyten, nämlich vor der Bedeckung mit Schlamm, oder neuen Erde ſoviel minder fürchten, als wir ſelbe vielmehr als höchſt nützlich erfahren können. Es iſt freylich ein trauriger Anblick, wenn wir ganze Felder, und Wieſen im Waſſer,

ſer, und nach deſſen Ablauf im Schlamme ſtehen ſehen. Aber es braucht nur eine wenige Ueberlegung, ſo werden wir uns vor einer ſo ſtillen Ueberſchwemmung nicht mehr entſetzen, als die Egypter bey dem Austritte ihres Nilflußes, weil wir ſicher ſind, daß ſie uns bey dem Ablauf nichts nehmen kann (§. 3.) wohl aber den fetteſten Dung für unſere Felder, und Wieſen uns hinterlaſſen muß. Es wäre überflüßig, einem Landwirth den von einer ſtillen Ueberſchwemmung hinterlaſſenen Schlamm als eine gute Koſt der Felder, und Wieſen anzurühmen, weil ich ihm doch nichts neues erzählen würde: es wird aber nicht umſonſt ſeyn, manchen zu erinnern, daß er ſich eben darum mit ſolchem, ihm ſo bekannten nützlichen Abtrag ſeines benachbarten Stromms ab den ſeltnen Schaden einer ſanften Ueberſchwemmung faſt jederzeit wird getröſten können, wenn er ſich der vorgeſchlagenen Vorſorge bedienet, einen wüthenden Fluß durch eine Ergüßung in die Ebne zu zerſtreuen: dieſe Ergüßung aber ſo ſanft, und ſtill zu machen, daß er nur darum, weil er eine von uns nach unſerm Gutdünken gemachte Oeffnung findet, oder weil er wegen gar zu viel angehäuften Waſſer übergeht, ſich auf unſre Flächen ergießen muß (§. 3.)

5. §.

Und ſo haben wir dann das erſte Mittel, uns vor den gewöhnlichen, bald mehr, bald mindern Ueberſchwemmungen eines ordentlich fließenden Flußes, oder Bachs zu verſichern; nämlich deſſen Wuth zu zerſtreuen, oder zu machen, daß ein angeſchwemmter Fluß ſich auf eine Ebne ergießen könne: ein Mittel, 1. das in ſeiner Wirkung gewiß iſt, weil ein ſo zerſtreuter Stromm niemals mit ſolcher Gewalt laufen, und reißen wird, als einer, der eine gäh angehäufte übergroſſe Waſſermenge durch nahe Ufer, und über ein zu ſehr geſenktes Flußbett ausgießen muß. 2.

ein Mittel, das ſelbſt, wo alles unter Waſſer geſetzt wird, gar nicht, oder nur zufällig ſchaden wird, und endlich 3. ein Mittel, das mit dem angeſchwemmten Dung ein anders Jahr den gemachten Schaden genug erſetzen wird.

6. §.

Wir haben aber ſo wenig Urſache, mit dieſem Mittel allein uns zu begnügen, als man die Wuth der Flüße nicht nur zu zerſtreuen hat, ſondern auch, wo dieſes nicht hilft, ſolche unkräftig, und unwirkſam zu machen. Wir müſſen uns erinnern, daß groſſe Wäſſer, wo ſie eingeſchränkt ſchnell laufen, gewiß reißend werden, und allenthalben untergraben; ſo, daß ganze Striche des Ufers einſtürzen, ehe die Fluth ſo hoch geſtiegen, daß ſie ſich über ſelbe hätte ergießen, und zerſtreuen ſollen. Wir müſſen die Vorſorge haben, ihn von dem Gegenſtande ſeines Zorns ſo weit, und mit ſo ſtarkem Widerſtande zu entfernen, daß er ſich daran die Hörner zerſtoſſen, oder doch ohne Schaden wüthen muß. Nun hat man freylich ſchon vor tauſend Jahren zu dieſem Abſehen koſtbare Dämme erbauet, die lebendige Kraft des Waſſers nach beliebigen Orten zu wenden: oder ſogenannte Schlächten, die Ufer vor dem Reißen und Untergraben des Stromms zu verſichern. Wie wenig aber ſo lange Zeit bey allen noch ſo groſſen Koſten, Wiſſenſchaft, und Erfahrung von dergleichen Bau was ſtandhaftes geliefert worden, iſt ſo traurig, als oft zu ſehen. Was iſt zu thun? Wir müſſen der Ueberſchwemmung Widerſtände ſetzen, die ſowohl das Reißen, als das Untergraben derſelben verhindern. Zwar, was das Reißen anbelangt, kann, ſich die Kunſt mit ihren Werkzeugen, nämlich den Schlächten, oder Wehren auch den größten Waſſergüßen ſo entgegen ſtellen, daß kein noch ſo groſſer, und noch ſo wüthender Stromm eine Spur des Schadens nach ſich laſſen kann. Gewiß, ſo groß der Anfall des Waſſers immer iſt, wird er doch keine Schlächte oder Wehren, ſo man bey unſern Zeiten ſetzt, ſchadhaft machen. Aber, wie ſteht es mit dem Untergraben? iſt nicht dieſes die Urſache, daß man nach abnehmendem Waſſer von den ſchönſten Waſſergebäuden nichts, als die bis auf den Grund entblößten Bäume findet, die, wenn es noch nicht geſchehen, alle Augenblicke den Einſturz der auf ſie gelegten noch übrigen Holzmenge drohen? und, wie iſt dieſer ſchädlichen Wirkung des Untergrabens vorzubauen?

7. §.

Wir müſſen die Wirkung kennen, ehe wir ſolche unkräftig machen wollen: wir müſſen wiſſen, was Untergraben ſey, und wie es geſchehe? Hierzu müſſen wir uns erinnern, daß die Haupteigenſchaften des Waſſers ſind 1. die Schwere: 2. die Flüßigkeit: 3. die Feinheit ſeiner Theilchen. Durch die erſte Kraft iſt es in ſteter Bemühung, nach der Perpendikular fortzuſchreiten: durch die zweyte wendet es dieſe Bemühung auf die Seite an: durch die dritte iſt es zum meiſten aufgelegt, nach den Geſetzen der Anziehung zu wirken, oder zu leiden: und hiemit durchdringet es den meiſten Widerſtand wenigſtens einige Linien tief. Nichts widerſteht ihm minder, als, was Erde heißet: ſollte dieſe auch ſchon ſo feſt zuſammengebacken ſeyn, daß ſie faſt den Name eines Steins verdiente. Gewiß: ein noch ſo feſt geſchlagner Thon wird auch von dem ſtilleſten Waſſer angegriffen; man darf nur ſolches durch einen Ablauf in Bewegung bringen, ſo wird man dieſe natürliche Wahrheit bald mehr, als man verlangen ſollte, beſtättiget finden. Es iſt alſo das Untergraben des Waſſers anders nichts, als daß ſelbes durch was immer für Naturgeſetze die Erdtheilchen von ihren Banden, die ſie vereiniget halten, auflöſe, mit ſich vermiſche, und ſo mit ſich vermiſchet fortführe, und dieſe allenthalben, wo es nur hinkömmt, aufweichen, und dann abfließen könne: ſo, daß es von einem Waſſerbau, wenn es einmal eindringen kann, alles, was nur Erde heißt, untergräbt, oder mit ſich fortſchwemmt, folglich alles, was auf der Erde geruhet, dem gewiſſen Einſturze ausgeſetzet, hinterläßt.

8. §.

Heißt nun dieſes Untergraben, ſo giebt uns die Vernunft, daß wir dem Waſſer, wo es ſich außerordentlich bewegen muß, ja nur keine Erde entgegen ſetzen dürfen, ein Geſetz, ſo von denen, die dermalen einen Waſſerbau führen, ſo wenig beobachtet, und ſo oft vernachläßiget wird, daß man faſt zweifeln ſollte, ob ihnen ſolches jemals ſey bekannt worden. Man beſehe nur den Bau unſerer ſogenannten Schlächten, die das Geſtad vor der Gewalt des reißenden Waſſers beſchützen ſollten. Wir machen ſolche darum, weil wir unſre Ufer wegen vieler Erde für zu ſchwach halten, dem Waſſer zu widerſtehen, und gebrauchen hierzu meiſtentheils eben das, was dem Waſſer nicht widerſtehen kann, nämlich Erde. Aus wem beſtehen denn unſere Schlächte? 1. aus Bauhölzern, die nach Gutdünken entweder nach einem rechten, oder nach einem ſchiefen Winkel tief in den Grund getrieben werden. 2. Aus Bauhölzern, die nach der Quere mit jenen verbunden werden. 3. meiſtentheils aus Büſchen von kleinem Holzwerk, oder ſogenannten Faſchinen, die mit Erde allenthalben unterlegt, belegt, und ausgefüllt werden, ſo, daß noch die Erde recht feſt eingeſtoſſen wird; in der Abſicht zwar, daß ſolche dem eindringenden Waſſer deſtomehr widerſtehen ſollte: mit der Folge aber, daß wir ihm eben hiemit deſto mehr ſchwachen Widerſtand entgegen ſetzen, weil wir ihm Erde entgegen ſetzen.

9. §.

9. §.

Selbſt die Eckſteine unſers Gebäudes, ſollen wir ſie mit Furcht, oder mit Hoffnung betrachten? wir treiben einen Stamm Holz, der, damit er ohne Widerſtand durchdringen könne, ſogar mit einer eiſernen Spitze, oder ſogenannten Schuhe bewaffnet iſt, in den Grund: und trennen hiemit die Erde mit einem Mittel, mit dem ſie ſich niemals ſo, als mit ſich ſelbſten, oder mit Steinen verbinden kann: nämlich mit einem Holz. Wir machen alſo dem Waſſer eine Stelle, da ſelbes nach ſeinen Naturgeſetzen eindringen, oder untergraben muß, wenn es ſich mit Bewegung aufhalten kann (§. 7.) und daß es ſich aufhalten, und mit Aufwallung bewegen müſſe, macht eben dieſes dem Lauf entgegengeſetzte Holz. Was folget? als, 1. daß ſich das Waſſer zwiſchen Holz, und Erde, weil hier keine Verbindung iſt, immer tiefer ſenke: daß es 2. immer tiefer die Erde auflöſe, und wegen ſteter Bewegung auf die Höhe treibe: daß es 3. die aufgelöſte und aufgetriebene Erde wegen der Bewegung mit ſich fortführe: und daß es hiemit 4. ſogar den Eckſtein unſers Gebäudes, den ſo tief getriebnen Baum, manchesmal bis unter die eiſerne Spitze entblöſſet hinterlaſſe. Trauriger Anblick, wenn wir nach der Ueberſchwemmung ſehen müſſen, daß uns die Güße mehr Land von dem Ufer fortgeriſſen, als wir mit groſſer Mühe, und Koſten erhalten wollten: aber auch traurige Erinnerung für einen Naturforſcher, und Menſchenfreund, wenn er ſiehet, daß man nur überlege, was das Waſſer gethan, und nicht, was es nach ſeinen Naturgeſetzen habe thun müſſen: und daß man folglich in Zukunft dem Schaden nicht beſſer, als bisher geſchehen iſt, vorbeugen werde!

10. §.

Wir dürfen alſo, die Erde unſers Ufers zu erhalten, den Ausſchweifungen des Waſſers keine Erde entgegenſetzen: aber, was ſonſt? Wo man keine Koſten ſparren darf, wird wohl mancher zuerſt auf ein von gehauenen, und gut verbundenen Steinen aufgemauertes Werk denken. Allein, ſo gerne ich ſehe, daß man mit gemauerten Dämmen ein ſtehendes Waſſer, als etwann einen groſſen Fiſchteuch einhalte, ſo ungern wollte ich ſolches an einem groſſen Fluße anlegen, weil alles Mauerwerk, ſobald Grund, oder Verbindung merklichen Schaden leidet, ſich gewiß trennen muß, und ein fließendes Waſſer, und noch mehr ein reiſſendes im Grund, und an der Verbindung gewiß eine Aenderung machen wird. Ich wollte alſo vielmehr die von ſtarken Holzſtämmen zuſammengefügten, und in den Grund des Waſſers nicht eingeſchlagenen, ſondern eingeſenkten Waſſerkäſten empfehlen: die ich eben den Waſſerbauverſtändigen um ſo weniger zu beſchreiben habe, als ſie ſelbe ſo oftmals gebrauchen, daß ſie bey ungewiſſem Flußbette ſogar ganze gemauerte Brücken-Jöcher auf dergleichen eingeſenkten, und mit Steinen angefüllten Waſſerkäſten aufführen dürfen. Man gebrauche ſich nun dergleichen Bauart ſo, daß man ganze Strecken des ſchwachen Ufers anſtatt der Schlächte mit dergleichen ſo zuſam̃engefügten hölzernen Wänden, als die Wände eines Waſſerkaſtens ſind, bedecke, und den Raum zwiſchen der Wand, und dem Ufer mit ſogenannten Schotter, oder kleinen Steinen ohne Erde anfülle, ſo wird die Ausgüßung weder bey der wirklichen Ueberſchwemmung, noch bey dem Abzuge, oder Fallen des Waſſers mehr ſchaden, als ein Dieb, der nichts hat rauben können, und doch die Oeffnung hinterlaſſen hat, wo er eingeſchloſſen war, zugleich aber den Vortheil entdecket, daß man ſich vor künftigem Anfalle deſtomehr verſichern könne.

11. §.

Ich muß von meinem Vorſchlage mehrere Rechenſchaft geben. Stellen wir uns ein Ufer vor, das anſtatt der gewöhnlichen Schlächte, eine ſo hölzerne Mauer, als eines Waſſerkaſtens, vor ſich hat: was wird hier auch die größte Ueberſchwemmung für eine Veränderung machen? Entweder muß ſie uns ſchaden 1. mit Uebergüßung, oder 2. mit Gewalt des reißenden Stromms, oder 3. mit dem ſo ſchädlichen Untergraben. Die Uebergüßung kann uns, wenn wir wollen, wenig ſchaden, aber viel nutzen (§. 4. 5.) und muß ſie uns auch zufälliger Weiſe ſchaden, weil ſie zu ungelegener Zeit kömmt, ſo iſt doch der Schaden nicht ſo groß, als wenn wir ganze Strecken von unſrer baubaren Erde verlieren. Die Gewalt, ich verſtehe unter dieſem Worte Stoß, oder Druck, dieſe Gewalt, wenn nur das Waſſer allein ſtößt, oder drückt, wird einem ſolchen Widerſtande in ſo kurzer Zeit, als unſere Ueberſchwemmungen dauren, wohl wenig abgewinnen können. All anderer Druck und Stöſſe ſind zufällig, und können mittels Vorſehung, wovon ich eine Weiſe noch in dieſer Abhandlung vorſchlagen werde, (§. 14.) meiſtentheils verhindert werden. Das Waſſer allein kann an dieſer Art von Schlächten nichts, als aufwallen, und vorbeyfließen, ohne ein Stückchen davon abzuſtoſſen. Aber wird ſelbes nicht wenigſt an den Ecken unſers Waſſerkaſtens anſtoſſen, aufwallen, und alſo untergraben? (§. 7. — 9.) es wird anſtoſſen, es wird aufwallen, es wird auch untergraben; aber wie wenig, da ſelbes keine Erde, keinen getrennten Boden, wo es eingreiffen könnte, vor ſich hat? (§. 9.) Das durch die Wände ſelbſt eindringende Waſſer findet keine Erde, die es mit ſich fortſchwemmen konnte, (§. 10.) und Steine können nicht folgen, weil die Ritzen zu enge ſind. Das an dem Fuß dieſes Kaſtens aufwallende Waſſer wird nur ſo wenig heben, daß die nachſinkenden Steinſchutte alles gleich wieder anfüllen kann, mit einer Leerung des Kaſtens, die oben mit neuer Anſchütt leicht zuerſetzen iſt. Von der auf dieſe Art erbauten Wehre, kann nicht das mindeſte getrennt werden: ſie wird immer ſtehen bleiben, wenn auch die ganze Füllung nachſinken ſollte. Was iſt nun leichter, eine ganz neue Wehre zu erbauen, oder einen ſolchen Waſſerkaſten nach der Ueberſchwemmung mit neuen Schotter auszufüllen? und zwar nur nach einem, oder dem anderen Waſſerguſſe; weil endlich das Waſſer ſelbſt mit wiederhollter Anſchüttung ſein Flußbett an dergleichen Wände anlegen wird.

12. §.

Nun kann man freylich einen ſolchen Waſſerkaſten nicht wohlfeil erkaufen. Allein wie theuer kömmt uns wohl der Bau einer zwey, bis dreymal immer koſtbarer aufgeführten Schlächte, ohne auch den Schaden der fortgeriſſenen Stücke unſers Ufers anzurechnen? Doch, laſſen wir auch ſolche koſtbare, aber niemals genug zubezahlende Vorſorge reichen Landwirthen, oder gar Landesherren über. Es giebt noch wohlfeilere Mittel zu unſerer Verſicherung, die nichts, als die Geduld in theuren Werth ſetzet; weil wir hier nicht ſelbſt arbeiten, ſondern nur Handlanger der Natur machen, die, wenn man ihr folget, ſichere und ſchöne Werke darſtellet, auf ihren Wegen aber ungemein langſam fortſchreitet. Setzen wir vor das Ufer, an dem ſich der überfließende Stromm mit dem ganzen Leben ſeiner Kraft reibet, einen Aufenthalt, der ſelbem immer ſoviel umſonſt abnimmt, als uns zu einer ganz natürlichen Schlächte, oder Wehre vonnöthen iſt. Es iſt möglich; denn, ſo räuberiſch, als das Waſſer insgemein, forderſt das Flußwaſſer iſt, ſo hat es doch den Ruhm noch nicht verlohren, daß es zwar raube, von dem Geraubten aber nichts für ſich behalte, ſondern alles wieder gebe, was es genommen; nur daß es nicht an dem Ort geſchieht, wo der der Raub geſchehen iſt: ſondern da, wo es ſelben zwiſchen einer Lage groſſer Steine muß liegen laſſen; denn da wird es ſeinen Raub ſolange ablegen, bis es ſich ſelbſt ein neues Flußbett machet, welches ſelbes niemals aufheben, wohl aber immer bedecken wird. Man unterſuche nur den Grund unſerer Flüße: meiſtentheils wird er aus groſſen, mit Sand, und Schotter ausgefüllten Steinlagen beſtehen.

13. §.

Eine ſolche Steinlage nun vor unſer Ufer zu ſetzen, koſtet freylich viele Mühe, und Fleiß, aber wenig Geld. Ich will hierzu nur einen und den anderen Vorſchlag machen: und ich zweifle nicht, es werden jene, die nach ſolchem ohne Vorurtheil arbeiten, und nachdenken wollen, noch weit tauglichere Mittel zu ihrer Abſicht entdecken. Man nehme ein groſſes, etwann wegen Alter ſonſt unbrauchbares Schiff, ſo wie man zu unſeren Salz- und Getraidzügen gebraucht: man lege ſolches bey ſeichtem Waſſer an das Ufer, das ſich vor Ueberſchwemmungen fürchten muß, nach einem zu unſerm Vorhaben tauglichen Winkel: man beſchwere ſolches Schiff mit irregularen groſſen Steinen, ſo, daß das Waſſer bey der Ergüßung Platz finde, ſeinen Raub abzuſetzen: man lege dergleichen Steine, mit Stöcken von gefällten groſſen Bäumen vermiſcht, um ſolch eingeſenktes Schiff herum, und man wird auch ſchon nach einem Jahre ſehen, was das Waſſer ſelbſt beytrage, eine natürlich dauerhafte Wehre vor das Ufer zu ſetzen. Die Koſten noch mehr zu erſparen, wird erklecklich ſeyn, vor das Ufer nur eine groſſe Lage der mit vielen verwirrten Wurzeln verſehenen Stöcken, von abgehauenen Eich- oder anderen groſſen Bäumen anzulegen, und ſolche mit groſſen, zum Theil mit eiſernen Klammen zuſammengehefteten Steinen zu verſetzen, und endlich alles dem Waſſer zu überlaſſen. Die Zeit wird die Mühe wohl belohnen, und dieſe wird theils ſelbſt nicht ſo beſchwerlich ausfallen, theils noch vortheilhaftere Unternehmungen an die Hand geben, wenn wir nur die Hand ohne Vorurtheile an das Werk legen. Ueberdas wird es auch nicht ſchaden, das noch übrige Ufer nebſt dieſer Vorſorge auch auf andere Art standhaft zu machen, und mit geſteckten Weiden, oder Felbern, und andern dergleichen die Erde anhaltenden Gewächſen zu verſehen: die uns auch, wann wir ſie ſo fleißig ziehen, daß wir ſie zu lebendigen Zäunen einflechten können, vor einem ſchädlichen An- und Ablauf der Fluth deſto ſicherer, und bequemer dienen werden. (§. 3.)

14. §.

Mit ſolcher Vorſicht haben wir freylich groſſe Hoffnung, den natürlichen Anfall unſerer gewöhnlichen Ueberſchwemmungen unſchädlich, ja wohl gar mit der Zeit nützlich zu machen, (§. 12. 13.) aber es iſt hiemit die Furcht vor dem zufälligen Schaden noch nicht gehoben; weil wir nicht wiſſen, was der in Wuth geſetzte Fluß für Gegenſtände finden und zum größten Nachtheile auf uns zuſtoſſen könnte. Allein, laßt uns nachdenken, was für ſchadhafte Werkzeuge ein ſich ergieſſender Fluß antreffen möchte, ſo werden wir ſolche bald kennen lernen, und erfahren, daß ſelbe nur groſſe Raubſtücke ſind, die der Räuber nicht ins Kleine bringen kann: als etwann untergrabene, und nach dem Falle fortgeriſſene bejahrte Bäume oder hölzerne Häuſer, und bey der Eisfluth ſchwere, und groſſe Stücke des ſogenannten Grundeiſes; denn dieſe ſind es, die mit einer ſo groſſen Schwere als die Geſchwindigkeit eines groſſen reißenden Flußes iſt, an die Ecken der Dämme, und Jöcher der Brücken angetrieben werden, oder, wo ſie ſich ſetzen, ſelbſt ihren Führer trotzen, und dem Stromme anweiſen, wohin er mit ſeiner Gewalt zum heftigſten ſtoſſen ſoll. Welch fürchterliche Waffen! aber wie leicht kan man dieſe unſerm wüthenden Freunde aus den Händen reißen? arme Fiſcher, und dem Fluß nahe arme Landleute wagen ſich auch mit Lebensgefahr dem Räuber die Beute abzujagen, oder das bey einer Ergüſſung hergeſchwemmte Bauholz aufzufangen: und weiſen uns zugleich, daß man einem wüthenden Fluße ſeine zufälliger Weiſe in die Hände geſpielten Waffen auf die leichteſte Weiſe abnehmen könne.

15. §.

Es kömmt alſo darauf an, daß man 1. wo das Waſſer nicht zu hoch iſt, forderſt bey den Brücken eine Vorkehrung mache, daß ſich von dem hergeſchwemmten nichts anlege, ſondern alles, was man ſonſt nicht auffangen kann, ohne Schaden durch die Brücke durchfließe. 2. Daß man, wenn das Waſſer ſelbſt die Brücke überſteigt, jene fürchterlichen Mauerbrecher, die ſo erſtaunliche groſſe Laſten hergeſchwemmter ganzer, oder gefällter Bäume, und dergleichen von der Brücke, oder wo ſie ſich immer an das Ufer ſchädlich anlegen, oder Schaden drohen, noch ehe ſie ſtoſſen, oder ſich ſetzen, weg und auf die Seite leite, und ganz, oder zerſtückt an das Land ziehe. Mit ſolcher Vorſorge werden wir dann nichts als Waſſer zu fürchten haben, deſſen einzelne Gewalt wir ſo gut kennen, (§. 11.) und ſo leicht unkräftig zu machen wiſſen. (§. 10. — 13.) Wer wird aber ſolche Vorſorge machen, betreiben, und ausführen? Wenn ſie nicht eine landesherrliche Verordnung macht, betreibet und ausführt, wird wohl nichts, oder nur was weniges, und dieſes nur zufälliger Weiſe geſchehen.

16. §.

Nun hat dann unſer Freund ausgewüthet: er blickt uns wiederum mit befriedigter Mine entgegen. Unſer Fluß geht über ein ſchmales Flußbett in einer reizenden Stille. Aber iſt uns hiemit geholfen? welch ſchmerzlichen Anblick bieten uns unſre abgeriſſenen oder überſchlämmten Ufer, unſre untergrabenen und ausgeſchwemmten Wehren, und Schlächte dar? Selbſt das ganz veränderte Rinnſaal unſers Flußes macht es uns nicht wünſchen, daß er ſeinen alten Lauf hätte behalten mögen? aber laßt uns nur auch an dem Ende nicht vergeſſen, daß wir mit einem wahren Freunde zu thun haben, der gewiß jederzeit fertig ſtehet, den Schaden zu erſetzen, wenn man ihm nur hierzu Hülfe, und Leitung giebet. Vor allem wird er (welches eben, alles in vorigen Stand zu ſetzen, das Vortreflichſte und Vorzüglichſte iſt) das vorige Flußbett gar gern annehmen, wenn man ihm nur hülft, daß er ſolches ſuchen könne. Hier verlange ich freylich was groſſes, was ungewöhnliches, und vieleicht gar was ungerechtes. Es iſt wahr, einen groſſen Fluß, nachdem er ausgetretten, wieder an das vorige Ufer zu bringen, iſt was ungewöhnliches; aber, daß ein Bach, nachdem er ausgeriſſen, etwann von einem Müller gezwungen werde, das alte Rinnſaal zu nehmen, iſt was gar gewöhnliches, weil nämlich dieſer auf thätige Mittel denket, wo andere ſich nur mit Klagen aufhalten, daß ſie der Stromm verlaſſen, nicht aber gedenken, viel minder ſich bemühen, ob, und wie ſie ſolchen wieder zu ſich leiten möchten.

17. §.

Man muthmaſſe hier nicht, als ob ich nicht einſehe, welch ein Verhältniß die Mühe, einen ellenbreiten Bach in ſeinen alten Graben zu ſchließen, zu jener habe, einen etlich Ruthen breiten ſchiffreichen Fluß an das verlaſſene Ufer zu legen. Ich weis alſo auch, daß die Beſorgung dieſes letztern nur von der Hand des Landsfürſten kann beſtritten werden. Aber welch ein würdiges Unternehmen für einen Landesherrn, und Vater ſeines Volkes wäre re wohl dieſes? Die Herren des Meeres werden in der Geſchichte unſterblich, wenn ſie einen Meerhafen von dem Schlamme räumen: und werden es die Herren der Flüße minder werden, wenn ſie den Lauf ihrer Gewäſſer zum Nutzen ihrer Unterthanen in ſeiner alten Bequemlichkeit erhalten? das Volk wird die Gnade ſeines Fürſten anrühmen, wenn er ihm den erlittenen Schaden mit einem Nachlaſſe der Abgaben erleichtert; es wird ihn aber Vater nennen, wenn er jedem ſeinen von dem Waſſer entzogenen Grund wieder giebet. Es wäre alſo mein Gedanken, daß man nach der Ueberſchwemmung, zur Zeit, da keine neue Ergüßung zu befürchten iſt, als etwann im ſpäten Herbſte, den Fluß, wo er ausgeriſſen, in das alte Flußbett zu bringen ſuchen ſoll. Solches in das Werk zu ſetzen, darf ich keinen Vorſchlag machen, wo es an erfahrnen Feldmeſſern keinen Mangel giebt; ich darf aber ein Unternehmen empfehlen, das einem Kaufmannsſchiffe nicht nur die alte, ſondern immer mehrere Sicherheit, und Bequemlichkeit: einem an dem Ufer wohnenden Landmann den alten Grund (der, ſey er auch noch ſo überſchüttet, doch noch zum Nutzen gerichtet werden kann) und endlich dem Landsfürſten die gründlichſte Ehre, und aufrichtigſte Liebe zum Gewinnſte darbieten wird.

18. §.

Ich ſchreibe vieleicht zu viel von dem Vortheile der Handelſchaft; was liegt einem Kaufmanne daran, ob er auf dieſer, oder auf jener Seite des Flußes hinab, oder hinauffahre, wenn er nur ſicher fährt, und an dem beſtimmten Ufer ausladen kann? Aber wie oft müſſen auch die erfahrenſten Schiffleute das Erkänntniß des von dem Fluße genommenen neuen Rinnſaals mit der Strandung, wo nicht gar mit der Scheiterung eines reich beladenen Schiffes bezahlen? Ich ſchreibe alſo nicht zuviel, weil ich überdas noch vorſehe, man werde zu dieſem Unternehmen noch weit mehr Vortheile entdecken, wenn man ſichs nicht verdrüſſen laſſen wird, meinem Gedanken ohne Vorurtheil, und nur nach Erfahrung, und Beobachtung nachzuſinnen. Noch dazu hoffe ich, der Stromm ſelbſten werde, wenn er öfters in den alten Weg geleitet wird, ſich ein ſo tiefes Flußbett bereiten, daß er ſelbes endlich nach keiner Ueberſchwemmung mehr verlaſſen wird; und endlich zweifle ich nicht, es werden wenigſt jene, die an dem Ufer wohnen, ſich dieſer ſo gemeinnützigen Arbeit mit fertigem Willen unterziehen.

19. §.

Wir haben alſo die Möglichkeit, einem ausgetrettenen Fluſſe ſeine vorige Bahne anzuweiſen. Haben wir aber wohl auch das Recht dazu? Iſt nicht das juſtinianiſche Jus Alluvionis ſo unvergleichlich, daß man es von dem Meerſtrande ſogar auf die Ufer der Flüße angewandt hat? Allein darf ich es ſagen, daß meines Erachtens der Grund dieſes Geſetzes bey unſeren Flüßen nur in einem ſchädlichen Vorurtheile beſtehe? Man nehme ſich die Mühe, die Vortheile zu ſchätzen, die ein ausgetrettener Stromm jenen, deren Ufer er verläßt, zuſpielen kann: ſo werden wir zwar einen entblößten etlich Ruthen langen Strich Landes ſehen, der aber 1. nur eine Stein- oder Schotterlage zu nennen iſt, der 2. zum Nutzen zu bringen die erfahrenſten Ackersleute ſchrecket: forderſt 3. da man immer befürchten muß, bey einer neuen Ueberſchwemmung wieder unter Waſſer geſetzt zu werden. Welch ein Vortheil! welch ein Recht! beyde, nämlich Vortheil und Recht, in Ueberlegung genommen, was iſt zuträglicher, dem alten Beſitzer ſeinen vorigen Grund (ſey er auch noch ſo verderbt, oder deſſen Lage an der Höhe oder Tiefe noch ſo verändert,) nachdem er ihn ſchon für verlohren hielt, wieder zuzuſtellen, oder einem andern dem Fluß nahen Ackersmanne einen Strich ſteinigten Sandbodens darzubieten, daß er ſolchen zu einem baubaren Felde machen ſoll? Jener wird ſein Kind, wenn es auch noch ſo ausgeartet iſt, jederzeit zur Verbeſſerung gerne aufnehmen: dieſer wird einen fremden, ſo unartigen Züchtling, wenn er ihm auch geſchenkt wird, mit ſchielen Augen anſehen. Das Glück für unſer Vaterland iſt, daß unſer Durchleuchtigſte Maximilian bey ſeiner Vollmacht, nicht das Joch, ſondern den Geiſt der Geſetze kennet.

20. §.

Ich ſchreibe im Eifer. Allein, wer ſollte ſich nicht über ſich erheben, wenn ſeine patriotiſchen Gedanken den Vortreflichkeiten des beſten Fürſten ſich näheren dürfen? Sie kennen nun hochanſehnliche erlauchte Mitglieder meine **Gedanken, wie dem faſt jährlichen, von Austrettung, und Ueberſchwemmung unſerer namhaften Flüße, verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuern ſey?** daß man nämlich 1. vor der Ergüßung Vorkehrung mache, daß der anſchwellende Fluß nicht reiße, ſondern ſich ohne Schaden ſanft ausgießen könne: daß man 2. dem wirklich reißenden Stromme keine Schlächten, oder Wehren entgegen ſtelle, die das Waſſer mit Untergraben untauglich machen könnte: daß man 3. nach der Ueberſchwemmung, um alles in den alten Stand zu ſetzen, vor allem trachte, den etwann ausgetrettenen Fluß in das alte Rinnſaal zu bringen: um ſo unſern beſten, aber gähling aufgebrachten Freund vor der Wuth zu zerſtreuen, bey ſelber unſchädlich, und nach ſelber wiederum dienſtbar zu machen. Dieſes ſind nun meine Gedanken, die ich als unvollkommen Ihnen zur Ueberlegung, zur Verbeſſerung, und zur Ausarbeitung vorlege: mich aber begnüge, daß ich meine Pflicht, wenigſtens zum Theil, mehrmal erfüllet habe.

* * *

Regiſter
der merkwürdigſten Sachen.

Alcaliſches Salz, iſt in den Pflanzen enthalten ſ. Farben.

Amorths, (Herrn Euſebius) Frage, wo ſo viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denſelben abzuhelfen 177 = 180.

Archimedeiſche Waſſerſchraube ſ. Waſſerſchraube.

Arſenik, Unterſchied deſſelben vom reinen Spießglaſe. 90.

Ausgüßungen der Flüße. ſ. Flüße.

Bergbau, Scheidts Abhandlung von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken 279 = 316. Das Wort Bauen hat bey Bergleuten verſchiedene Bedeutungen, je nachdem ſie über oder unter der Erde bauen 282. Wie man der Waſſernoth, und den böſen Wettern entgegen gehen müße 284. Verſchiedene Arten der Durchbrechungen, ihre Vortheile und Ungemächlichkeiten 285. ꝛc. Von dem unterirdiſchen Bergbaue in faſt wagerecht = oder ſchwebend liegenden Erd = und Steinlagen 291 = 296. Vom unterirdiſchen Bergbaue in erhobenen Erd= und Steinlagen 296 = 304. Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd= und Steinlagen. 304 = 314. Krummes Holz iſt zur Auszimmerung des Schachtes beſſer, als das gerade 310 = 312. Ein Vorſchlag zur Ausmauerung der Hauptſchächte 313. Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in erhobenen Erd = und Steinlagen 315 und 316.

Beſchleunigung und Druck ſind einerley Kräfte, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153.

Brunwiſers, Verſuche mit mineraliſchen ſauren Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen, dann zufällige Gedanken, wie aus dieſen Farben die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten, und Blätter der Vegetabilien zu erklären. 317 = 340.

— — Entdeckung verſchiedener vegetabiliſchen Farbmaterialien, Seiden und Wollenzeuge ſchön und dauerhaft gelb zu färben. 341 = 351.

Buchholzes, Abhandlung von Verbeſſerung des Spießglasſchwefels. 87 = 96.

Centralkräfte, Leonard Grubers einige Grundſätze der Theorie der Centralkräfte in Rückſicht auf die Aſtronomie. 203 = 244. Beweis, daß man jede Centralkraft, welche in ſehr kleinen Zeitpunkten ſich äußert, als eine einförmige Zunehmungs= oder Beſchleunigungskraft annehmen könne. 207. Vorläufige Theorie der Centralkräfte 222 = 228. Sätze von den Centralkräften in Rückſicht auf den Lauf der Planeten 228. Aufgaben hievon und deren Auflöſungen 236 = 244. Beweis, daß die Centralkräfte, wenn ſie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältniſſe wirken, einen Kegelſchnitt beſchreiben 243 und 244.

Druck und Beſchleunigung ſind einerley Kräfte, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153.

Durchbrechungen, verſchiedene im Bergbaue 285. ꝛc.

Farben, Mathias Brnnwiſers Verſuche, wie mit mineraliſchen ſauren Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen, und wie aus dieſen Farben die Röthe, Blaue, Grüne und Gelbe der Blüthen, Blumen ꝛc. zu erklären. 317. 340. Gelegenheit zu dieſen Verſuchen 320. 321. Es ſteckt im Holze ein unſichtbares Farbeweſen 321. Brennbare Geiſter ſind zu Abſönderung deſſelben nicht tauglich. 321. Die Luftſäure iſt Urſache, warum die meiſten abgehauenen Hölzer im Anfange weiß, und wenn ſie der Luft ausgeſetzt ſind, gelb werden 321. Verſuch das Farbeweſen aus den Hölzern durch mineraliſche ſaure Geiſter auszuziehen 322. Salzſäure, Vitriolſäure, und Salpeterſäure leiſten verſchiedene Wirkungen 323. 324. Die gelbe Farbe iſt nicht flüchtig, wohl aber die rothe, und noch mehr die blaue. 323. Marggraf beweiſet, daß in allen Pflanzen ein weſentliches alcaliſches Salz verſteckt iſt. 325. Dieſes Salz iſt die Urſache, warum die Hölzer ihre Farben verborgen halten 326. Augenſcheinlicher Beweis hievon 327. Erklärung

klärung, wie die Farben aus dem Stamme in die Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchte überbracht werden 329. 330. Delavals Meinung von der Grüne der Blätter. 330. Eine andere Erklärung davon 331 = 334. Wo es herkomme, daß einige Hölzer in ihrem Innerſten gefärbt ſind. 335. Ob nicht die Röthe des Geblüts von der Luftſäure herrühren könne: 337. Ob der Geruch der Pflanzen nicht von der Luftſäure entwickelt werde 337. Nutzen dieſer Verſuche für Gärtner, und Holzkünſtler 338. wie auch Tücher und Seidenzeuge ſchön und dauerhaft gelb oder grün zu färben. 339.

— — — Brunwiſers Entdeckung verſchiedener vegetabiliſchen Farbmaterialien, Seiden und Wollenzeuge ſchön und dauerhaft gelb zu färben 341 = 351. Materialien zu gelben Farbſtoffen ſind gar nicht zahlreich 343. Gelegenheit zu gegenwärtiger Entdeckung 343. 344. Die rothe, blaue, und gelbe Farbe ſind all das Schöne, was wir in den Pflanzen bewundern. 344. Die rothe und blaue haben noch nicht können fixirt werden. 344. Art die gelbe Farbe aus den Hölzern zu erhalten, und ſelbe auf Seiden und Wollenzeuge anzubringen [illegible]5 = 347. Die auf dieſe Art gelb gefärbten Zeuge kommen an Schönheit, Glanz und Dauerhaftigkeit den oſtindianiſchen und franzöſiſchen gleich. 347. Man ſoll aber dazu kein harzichtes Holz nehmen 347. Hölzer, die dieſe Farbe liefern 348. Die ſchlechteſten, und zu anderm Gebrauche untauglichſten Hölzer liefern die ſchönſte gelbe Farbe, und in groſſer Quantität. 348 = 350. Die ſo gefärbten Zeuge werden mit Lauge verdorben, aber durch die Seife nur ſchöner 351.

Flüße, Herrn Amorichs Frage, wo ſo viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denſelben abzuhelfen 177 = 180. Sie rühren nicht von einem in größerer Menge als ſonſt, herabfallenden Regen oder Schnee her, ſondern vielmehr von der Häufung des Sandes in dem Grunde des Flußes 177. ſind ſehr ſchädlich 178. Das füglichſte Mittel darwider wäre eine Nachahmung der zu Venedig errichteten Maſchine zu Säuberung des Meergrundes. 178. Eine Stiftung hiezu hätte vor vielen andern frommen Stiftungen einen Vorzug 179. 180.

— — — P. Clarus Mayrs Gedanken, wie dem faſt jährlichen von Austrettung der Flüße verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuern ſey. 353 = 373. Je unmerklicher das Rinnſaal des Waſſers von der Horizontallage abnimmt, und je weniger die Maſſe des abfließenden Waſſers eingeſchränkt wird, deſto weniger Schaden iſt davon zu beſorgen. 357.

357. Man ſoll dem Fluße, wo es möglich, ein von der Horizontallage unbemerklich abhangendes Flußbett, oder eine Oeffnung am Ufer machen, damit er ſich ſanft ergieße, das Ufer aber mit Geſträuchen wohl verlegen, damit nur Waſſer, und keine Erde oder Früchte bey dem Ablaufe durchfließen. 357. 358. Der Schlamm wird hierdurch nicht ſchädlich, ſondern vielmehr ein guter Dung werden 359. Wider das Reißen der Flüße ſind unſre Schlächte und Wehren die tauglichſten Mittel. 360. Ein Vorſchlag wider das Untergraben der Flüße 361. — 366. ein anderer Vorſchlag hierzu 367. Einem abgewichenen Fluße ſoll man ſein voriges Rinnſaal anzuweiſen trachten 370 ⸗ 372. Das juſtinianiſche Jus alluvionis bey den Flüßen hat ein Vorurtheil zum Grunde. 372. 373.

Geruchtheile der Pflanzen, ob dieſe nicht von der Luftſäure entwickelt werden. 337.
Grubers, (Leonard) analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien 181 ⸗ 202.
— — — einige Grundſätze der Theorie der Centralkräfte in Rückſicht auf die Aſtronomie. 203. ⸗ 244.
— — — Brief von Berechnung des im Jahre 1769. erſchienenen Kometen 245. 278.

Halley rühmet ſich, nie im aſtronomiſchen Kalkulus gefehlet zu haben 247.
Hennerts, Auflöſung der berliniſchen Preisfrage von der archimedeiſchen Waſſerſchraube iſt irrig. ſ. Waſſerſchraube.
Hevelius, hat die Parabole der Kometen erfunden. 248.
Hölzer, ſ. Farben.

Karſtens, Abhandlung von den Projectionen der Kugel. 1 ⸗ 32.
— — — von der archimedeiſchen Waſſerſchraube. 33 ⸗ 86.
— — — über die Theorie der Saugwerke. 97 ⸗ 146.
— — — Verſuch eines evidenten Beweiſes der allgemeinen mechaniſchen Grundſätze 147 ⸗ 175.
Kögelſchnitte, ſ. Centralkräfte.
Komet, Leonard Grubers Brief von Berechnung des im Jahre 1769. erſchienenen Kometen 245 ⸗ 278. Halley allein rühmet ſich, nie im aſtronomiſchen Kalkulus gefehlt zu haben 247. Hevelius hat die Parabole der

Kometen erfunden 248. De la Caille und de la Lande haben die Anomalie derſelben durch allgemeine Tabellen aufgeklärt. 249. Die Annehmung eines ungewiſſen Verhältniſſes zwoer Diſtanzen iſt die Urſache der öfteren Irrungen in Berechnung eines Kometen 249. Es iſt nicht thunlich, daß man eine andere Methode der Berechnung des Kometen, als die gewöhnliche iſt, erfinde 254. Newtons Methode iſt nicht hinreichend 251⸗253. Doch läßt ſich hieraus für die gemeine Berechnung ein groſſer Vortheil ziehen, nämlich die genaueſten Verhältniſſe der zween Abſtände gleich auf das erſtemal zu finden. 253. Anwendung dieſer Methode auf den letzten Kometen 254. 272. Die newtonianiſche Methode iſt der bekannten ſogar vorzuziehen, wenn der Komet nur etliche Tage kann beobachtet werden 266. Die Länge der Dunſtſäule des letzten Kometen 273. 274. Die Dünne der Dunſtſäule 274. 275. Whiſtons Erklärung von der Sündfluth durch einen Kometen. 275. 276. Die Ueberſchwemmungen in Amerika ſind keine Wirkung des letzt erſchienenen Kometen. 276⸗278.

Kräfte lebendige und todte. 170⸗174.

Kugel, ſ. Projectionen.

Leibnitzens, lebendige und todte Kräfte 170⸗174.

Linien, Leonard Grubers analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien 181⸗202. Hauptbegrife, die man dabey vorausſetzen muß 185⸗188. Die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden 191. Die Vielfältigkeit des gegebenen Puncts zu beſtimmen 191. und 193. Selben auf die krumme Linie zu beziehen. 192. Die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung auszuforſchen. 194. 195. allgemeinere Fälle. 197⸗202.

Luftſäure, ſ. Farben.

Mayrs, (P. Clarus) Gedanken, wie dem faſt jährlichen von Austrettung der Flüße verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuren ſey. 353.

Mechaniſche allgemeine Grundſätze, Karſtens Verſuch eines evidenten Beweiſes derſelben. 147⸗175. Die Fundamentalgleichung der ganzen Mechanik ſchien Herrn Daniel Bernoulli noch nicht für erwieſen. 149. Karſtners Beweis ſcheint der hinreichendſte zu ſeyn 150. Statik und Mechanik ſollen als beſondere Wiſſenſchaften abgehandelt werden. 150. Das

Wort Kraft iſt oft unbeſtimmt gebraucht worden. 151. Gleichförmig beſchleunigende Kräfte. 151 = 163. Druck und Beſchleunigung ſind einerley Kraft, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153 Ungleichförmig beſchleunigende Kräfte. 163 = 166. Vom Maas der Kräfte. 167. Eigentlich hat weder ein bewegter noch ruhender Körper etwas, was den Name Kraft verdiente. 169 und 170. Die Leibnitziſche Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige iſt unverſtändlich. 170 = 174.

Newtons, Methode von Berechnung der Kometen. 251 = 253.

Parents, acht Aufgaben von der Theorie der Saugwerke ſind von Belidor nicht genug erläutert. ſ. Saugwerke.

Projectionen der Kugel. Karſtens Abhandlung davon. 1 = 32. Die alten Geometer haben ſie allezeit als Kögelſchnitte betrachtet. 4. Eulers Begrif vom ſchiefen Kegel iſt vom apolloniſchen und euclideiſchen unterſchieden. 5. Aufgaben davon, und deren Auflöſungen 6 = 26. Von der ſtereographiſchen Projection der Meridiane der Kugel. 26. Von der ſtereographiſchen horizontal Projection der Meridiane. 26. 27. Von der ſtereographiſchen Projection der Parallelkreiſe des Aequators 29. Von der ſtereographiſchen horizontal Projection der Parallelkreiſe des Aequators. 29.

Saugwerke, Karſtens Abhandlung über die Theorie derſelben 97 = 146. Zwey Stücke werden zu einem guten Saugwerke erfordert. 99. Drey Klaſſen der Saugwerke 100. Unterſuchung über die anfängliche Bewegung des Waſſers in der Saugröhre, und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht. 103 = 128. Parents acht Aufgaben ſind von Belidor nicht genug aufgeklärt. 119 = 128. Unterſuchung über die Bewegung des Waſſers im Stiefel, nachdem ſchon alle Luft aus dem ſchädlichen Raume ausgetretten iſt. 129. ꝛc. Johanns und Daniels Bernoulli Entdeckungen in der Hydraulik, und deren Anwendung auf die Waſſerpumpe 136. 137. Belidors Irrungen 135 = 146.

Scheidts, Abhandlung vom unterirdiſchen Baue bey Bergwerken 279 = 316.

Spießglasſchwefel. Buchholzes Abhandlung von Verbeſſerung deſſelben 87 = 96. Unterſchied des groben Spießglasſchwefels, und deren von den letztern Niederſchlägen 87 = 91. Unterſchied des reinen Spießglaſes von dem Arſenik 90. Die brechendmachende Wirkung iſt den reguliniſchen Theilen zuzuſchreiben 91. Verſuche dieſen Schwefel zu verbeſſeren 92 & ſeqq.

Ueberſchwemmungen, ſ. Flüße.

Ueberſchwemmungen in America, ſind keine Folgen des letzten Kometen 276 = 278.

Waſſernoth, und böſes Wetter im Bergbaue 284.

Waſſerſchraube, archimediſche, Karſtens Abhandlung davon 33 = 36. Herrn Eulers Theorie 35. Preisfrage der königl. Akademie zu Berlin, wie eine Waſſerſchraube am vortheilhafteſten anzuordnen ſey. 35. Herrn Hennerts Auflöſung wird gekrönet, iſt aber nicht hinreichend. 36. Geſtalt der Waſſerſchraube, und Eintheilung derſelben 36 = 37. Beweis, daß, wenn die Schnecke das Waſſer heben ſoll, der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont größer ſeyn müſſe, als der Winkel der Schraubenlinie mit dem Umfang der Grundfläche 40 = 43. Wie das Waſſer bloß durch ſein Gewicht in der Waſſerſchraube ſteigen könne. 43 = 45. Das Moment zu finden, womit das Waſſer, ſo wie es durch den ganzen waſſerhaltenden Bogen ausgebreitet iſt, die Schnecke um ihre Axe zu drehen ſtrebt. 46 = 48. Die Länge des waſſerhaltenden Bogens zu finden 48. Wenn die Waſſerſchraube durch eine Maſchine umgetrieben wird, und an derſelben eine veränderliche Kraft angebracht iſt, die von der Geſchwindigkeit der Maſchine abhängt: welche Menge Waſſer dieſe Maſchine bey der vortheilhafteſten Anordnung auf eine gegebene Höhe in gegebener Zeit heben könne. 51. 52. Eine vortheilhafte Anordnung einer Maſchine, welche die Waſſerſchraube umtreiben ſoll, anzugeben 52 &c. Ob die Waſſerſchraube ihre Dienſte nicht leiſte, wenn ihre Grundfläche ganz unter Waſſer ſteht: Eulers und Hennerts Unterſuchung darüber 56. ꝛc. Herrn Hennerts Irrung 60. Neue Irrung deſſelben 71 = 86.

Whiſtons, Erklärung der Sündfluth durch einen Kometen iſt nicht gegründet. 275.

Transf'd. from P.E.X.
FEB 1888

6

1570, D.

S.1310.D.